Djeljivost prirodnih brojeva

1. Odredi zbroj dvoznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1.
2. Koji je najmanji prirodni broj koji pri dijeljenju s 7, 17 i 27 daje ostatak 4?
3. Koji je najveći peteroznamenkasti broj koji pri dijeljenju s 6, 8, 10, 12 i 14 daje isti ostatak 3?
4. Prirodni broj n podijeljen sa 7 daje ostatak 4, a podijeljen s 8 daje ostatak 1. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja n s 56?
5. Janja ima dvoznamenkast broj perlica. Ako ih broji po 2, ostat će 1, ako ih broji po 3 ostat će 2, a ako ih broji po 4 ostat će 3. Jedino ako ih broji po 5 neće ostati ni jedna. Koliko Janja ima perlica?
6. Ploču širine 476cm i duljine 364cm treba razrezati na sukladne kvadrate. Odredi površinu jednog takvog kvadrata? Koliko ih najviše možemo izrezati?
7. Zbroj dvaju prirodnih brojeva je 396, a njihov najveći zajednički djelitelj je 99. Odredi najmanji zajednički višekratnik tih brojeva.
8. Umnožak dvaju prirodnih brojeva je 4320, a njihov najmanji zajednički višekratnik je 360. Odredi te prirodne brojeve.
9. Najveći zajednički djelitelj dvaju prirodnih brojeva je 18, a najmanji zajednički višekratnik 270. Odredi te prirodne brojeve ako im je razlika 36.
10. Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive s 15 kojima je znamenka stotica za 4 veća od znamenke desetica.
11. Odredi zbroj brojeva djeljivih s 2 takvih da im je zbroj znamenaka 7, a umnožak 12.
12. Koliko ima brojeva manjih od 8888 djeljivih brojem 18 zapisanih samo znamenkama 1 i 8?
13. Koliko ima brojeva manjih od 10000 koji su djeljivi brojem 5 i kojima je znamenka desetica trostruko veća od znamenke stotica?
14. Odredi najmanji peteroznamenkasti broj kojem su sve znamenke različite i koji je djeljiv s 90.
15. Koliko ima brojeva između 111 i 4444 koji su djeljivi s 3 i čiji je umnožak znamenaka 4?
16. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 40 kojem su znamenke desetica i tisućica jednake.
17. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva djeljivih s 25 kojima je znamenka tisućica tri puta manja od znamenke stotica?
18. Odredi zbroj troznamenkastih brojeva kojima je umnožak znamenki 24 i koji su djeljivi s 12.
19. Koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih s 4 zapisanih različitim znamenkama?
20. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 8 kojem su znamenke parni složeni brojevi.
21. Odredi sve peteroznamenkaste brojeve djeljive s 45 kojem su znamenke neparni prosti brojevi.

Rješenja:

1. Dvoznamenkasti brojevi koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1 su 6, 11, 16, 21, … 96, pa je traženi zbroj $6 + 11 + 16 + 21 + … + 91 + 96 = (6 + 96) \cdot 19 : 2 = 969$.

2. $V(7, 17, 27) = 3213$, pa je traženi broj $3213 + 4 = 3217$.

3. $V(6, 8, 10, 12, 14) = 840$. Najveći peteroznamenkasti višekratnik broja 840 je 89880, pa je traženi broj $89880 + 3 = 89883$.

4. Vrijedi $n = 7x + 4$ i $n = 8y + 1$. Množenjem prve jednakosti s 8, a druge sa 7 dobivamo $8n = 56x +32$ i $7n = 56y + 8$.
Oduzimanjem jednakosti imamo $n = 56(x – y) + 25$, te zaključujemo da je ostatak pri dijeljenju broja n s 56 jednak 25.

5. $V(2, 3, 4) = 24$, Dvoznamenkasti višekratnici broja 24 su 24, 48, 72, 96. Njihovi prethodnici su 23, 47, 71, 95. Jedini broj koji je djeljiv s 5 je 95, pa zaključujemo da Janja ima 95 perlica.

6. $D(476, 364) = 28$, pa zaključujemo da je duljina najveće stranice kvadrata 28cm. Površina jednog kvadrata je $28 \cdot 28 = 784$ cm^2. Imamo $476 : 28 = 17$ i $364 : 28 = 13$, pa je ukupan broj takvih kvadrata $17 \cdot 13 = 221$.

7. Neka su traženi brojevi a i b i $a + b = 396$. S obzirom da je $D(a, b) = 99$ vrijedi $a = 99x$ i $b = 99y$, gdje su x i y prirodni brojevi i vrijedi $D(x, y) = 1$.
$99x + 99y = 396$, tj. $x + y = 4$, te razmotrimo mogućnosti:
1) $x = 1, y = 3$ $a = 99 \cdot 1 = 99$, $b = 99 \cdot 3 = 297$ $D(99, 297) = 99$
2) $x = 2, y = 2$ $a = 99 \cdot 2 = 198$, $b = 99 \cdot 2 = 198$ $D(198, 198) = 198$
Uvjet zadatka ispunjava prvi slučaj, pa su traženi brojevi 99 i 297, tj. $V(99, 297) = 297$.

8. Neka su traženi brojevi a i b i $a \cdot b = 4320$. S obzirom da je $V(a, b) = 360$ i vrijedi $V(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$, imamo $D(a, b) = 12$. Tada je $a = 12x$ i $b = 12y$, gdje su x i y prirodni brojevi i vrijedi $D(x, y) = 1$. Uvrštavanjem a i b u $a \cdot b = 4320$, dobivamo da je $x \cdot y = 30$ i razmatramo 4 mogućnosti:
1) $x = 1, y = 30$ $a = 12 \cdot 1 = 12$, $b = 12 \cdot 30 = 360$
2) $x = 2, y = 15$ $a = 12 \cdot 2 = 24$, $b = 12 \cdot 15 = 180$
3) $x = 3, y = 10$ $a = 12 \cdot 3 = 36$, $b = 12 \cdot 10 = 120$
4) $x = 5, y = 6$ $a = 12 \cdot 5 = 60$, $b = 12 \cdot 6 = 72$
Imamo 4 rješenja i to su: 1) 12 i 360, 2) 24 i 180, 3) 36 i 120, 4) 60 i 72.

9. Neka su traženi brojevi a i b, tada je $D(a, b) = 18$ i $V(a, b) = 270$.
S obzirom da je vrijedi $V(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$, dobivamo da je $a \cdot b = 4860$.
Tada je $a = 18x$ i $b = 18y$, gdje su x i y prirodni brojevi i vrijedi $D(x, y) = 1$.
Uvrštavanjem a i b u $a \cdot b = 4860$, dobivamo da je $x \cdot y = 15$ i razmatramo 2 mogućnosti:

1) $x = 1, y = 15$ $a = 18 \cdot 1 = 18$, $b = 18 \cdot 15 = 270$
2) $x = 3, y = 5$ $a = 18 \cdot 3 = 54$, $b = 18 \cdot 5 = 90$

Prema uvjetu zadatka da im je razlika 36, zaključujemo da su traženi brojevi 54 i 90.

10. Broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv s 3 i 5. Zadnja znamenka broja je 0 ili 5.
    Iz uvjeta zadatka dobivamo tražene brojeve 400, 405, 510, 515, 620, 625, 730, 735, 840, 845, 950 i 955.

11. Zbroj znamenaka je 7, a umnožak 12 u sljedećim slučajevima: 34, 43, 223, 232, 322.
    Brojevi djeljivi s 2 su 34, 232 i 322, pa je njihov zbroj $34 + 232 + 322 = 588$.

12. Broj je djeljiv brojem 18 ako je djeljiv s 2 i 9.
    Brojevi djeljivi s 9 zapisani znamenkama 1 i 8, a manji od 8888 su 18, 81, 8811, 8181, 8118, 1188, 1818, 1881. Brojevi koji su djeljivi s 2 a imaju zadnju znamenku 8 su 18, 8181, 8118, 1188 i 1818. Traženih brojeva ima 5.

13. Brojevi koji su djeljivi s 5 završavaju znamenkom 0 ili 5. Iz uvjeta zadatka vrijedi: da su zadnje tri znamenke broja 315, 310, 625, 620, 935, 930.
    Tražimo brojeve manje od 10000. Do svake tisućice ih ima 6, a tisućica ima 10, pa traženih brojeva ima 60.

14. Broj djeljiv s 90 je djeljiv s 9 i 10.
    Traženi broj je djeljiv s 10, znači da mu je zadnja znamenka 0, a zbroj prve četiri znamenke mora biti djeljiv s 9. Znači mora biti 9, 18, 27 ili 36.
    Pogledajmo sve 4 mogućnosti:
    - 9 ne može biti jer je najmanji zbroj s različitim znamenkama $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
    - 18 može biti najmanji s različitim znamenkama i to je broj 12690
    - 27 i 36 ne može biti jer znamenke ne bi bile različite

    Traženo rješenje je 12690.

15. Umnožak znamenaka može biti 4 ako su znamenke 4 i 1, te 2, 2 i 1.
    Brojevi djeljivi s 3 i zapisani znamenkama 4, 1 i 1 između 111 i 4444 su 114, 141, 411, 1114, 1141, 1411 i 4111. Brojevi djeljivi s 3 i zapisani znamenkama 2, 2, 1 i 1 između 111 i 4444 su 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 i 2211.
    Traženih brojeva ima $6 + 7 = 13$.

16. Broj je djeljiv s 40 ako je djeljiv brojevima 8 i 5. Ako je djeljiv s 5 posljednja znamenka mora biti 0 ili 5. Ako je broj djeljiv s 8 troznamenkasti završetak broja je djeljiv s 8, a to ne može biti ako je posljednja znamenka 5.

    Promatramo mogućnosti kad je posjednja znamenka 0 i ako su znamenke:
    - tisućica i desetica 1: ne postoji takav broj
    - tisućica i desetica 2: 2120, 2320, 2720
    - tisućica i desetica 3: ne postoji takav broj

- tisućica i desetica 4: 4040, 4240, 4440, 4640, 4840
- tisućica i desetica 5: ne postoji takav broj
- tisućica i desetica 6: 6160, 6960
- tisućica i desetica 7: ne postoji takav broj
- tisućica i desetica 8: 8080, 8480, 8880
- tisućica i desetica 9: ne postoji takav broj

Traženi brojevi su 2120, 2320, 2720, 4040, 4240, 4440, 4640, 4840, 6160, 6960, 8080, 8480 i 8880.

17. Brojevi djeljivi s 25 završavaju sa skupinom znamenaka 00, 25, 50, 75.
    Znamenke tisućica i stotica su skupine 13, 26 i 39, a na mjesto desetitisućica mogu doći znamenke od 1 do 9. Traženih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 9 = 108$.

18. Umnožak znamenki troznamenkastog broja je 24 ako su znamenke:
    - 6, 2, 2 dobivamo brojeve 622, 266, 262 od kojih ni jedan nije djeljiv s 12
    - 3, 4, 2, dobivamo brojeve 342, 324, 423, 432, 234, 243 od kojih su 324 i 432 djeljivi s 12
    - 6, 4, 1 dobivamo brojeve 641, 614, 146, 164, 461, 416 od kojih su 416 i 1164 djeljivi s 12
    - 8, 3, 1 dobivamo brojeve 831, 813, 138, 183, 381, 318 od kojih ni jedan nije djeljiv s 12

Traženi zbroj je $324 + 432 + 416 + 164 = 1336$.

19. Troznamenkastih brojeva djeljivih s 4 ima $900 : 4 = 225$.
    Promotrimo u tim brojevima skupine znamenaka s kojima završavaju i prebrojimo brojeve zapisane s istim znamenkama:
    - sa završetcima 00, 44, 88 imamo $9 \cdot 3 = 27$ brojeva
    - sa završetcima 04, 08, 20, 40, 60, 80 imamo 6 brojeva
    - sa završetcima 12, 16, 24, 28, 32, 36, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96 imamo $15 \cdot 2 =$ 30 brojeva

    Troznamenkastih brojeva djeljivih s 4 zapisanih različitim znamenkama ima
    $225 - 27 - 6 - 30 = 162$

20. Četveroznamenkasti brojevi kojima su znamenke parni složeni brojevi
    sadrže znamenke 4, 6 i 8. Broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8.
    Troznamenkasti završetci mogu biti: 444,446,448,464,484,644,844,
    666,664,668,646,686,466,866
    888,884,886,848,868.488,688.

Djeljivi s 8 su: 448, 464, 664, 888, 848, 488, 688, pa su traženi brojevi:
4448, 4464, 4664, 4888, 4848, 4488, 4688,
6448, 6464, 6664, 6888, 6848, 6488, 6688,
8448, 8464, 8664, 8888, 8848, 8488, 8688,

21. Neparni prosti brojevi koji mogu biti znamenke su 3, 5 i 7.
Brojevi djeljivi s 5 završavaju znamenkom 5, a zbroj znamenaka im mora biti djeljiv s 9.
Tražimo brojeve oblika $\overline{abcd5}$ i a + b + c + d je višekratnik broja 9.
1.) a + b + c + d + 5 = 9 → a + b + c + d = 4 ne može biti
2.) a + b + c + d + 5 = 18 → a + b + c + d = 13 ne može biti
3.) a + b + c + d + 5 = 27 → a + b + c + d = 22, može biti za znamenke
3, 7, 7, 5, pa su traženi brojevi : 37755, 37575, 35775, 57735, 57375,
53775, 77535, 75735, 75375, 77355.
4.) a + b + c + d + 5 = 36 → a + b + c + d = 31 ne može biti jer maksimalan
zbroj koji možemo imati je 28