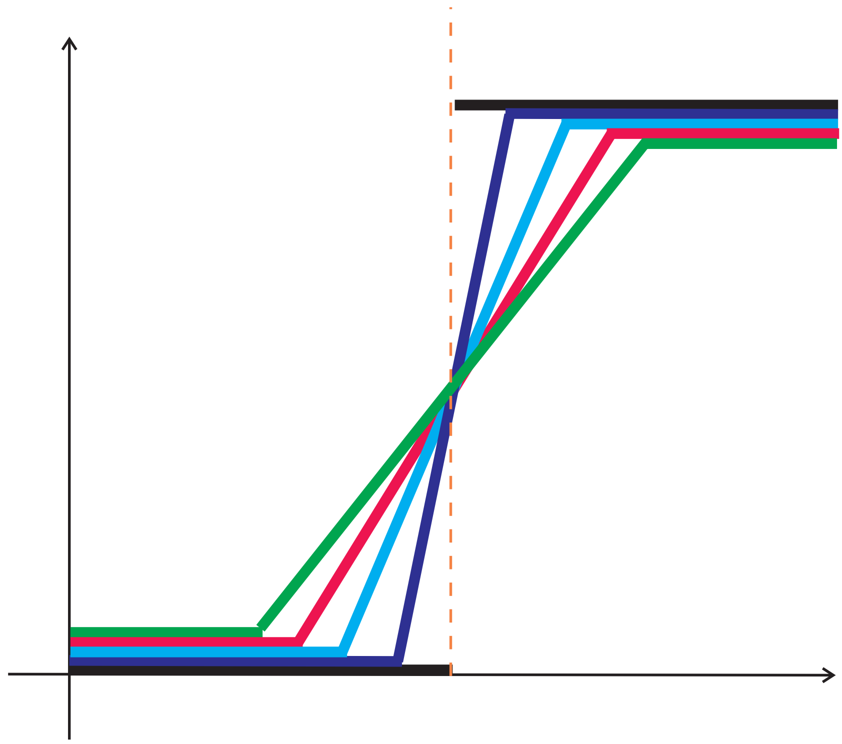
# Metrički prostori i Riman-Štiltjesov integral



# Sadržaj

# Glava 1

# Metrički prostori

## 1.1 Primeri metričkih prostora

Mnogi pojmovi u matematici, posebno u matematičkoj analizi, suštinski podrazumevaju postojanje rastojanja u nekom skupu. Osnovne osobine rastojanja između dva objekta (elementa nekog skupa) date su aksiomatski u sledećoj definiciji.

**Definicija 1.1.1.** Neka je $X$ neprazan skup. Funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jeste *metrika*, ili *rastojanje*, u skupu $X$, ako za svako $x, y, z \in X$ važi:

(a) $d(x, x) \geq 0$;
(b) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako važi $x = y$;
(c) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrija);
(d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trougla).

U tom slučaju je uređen par $(X, d)$ *metrički prostor*, ili $X$ je metrički prostor, a postojanje metrike $d$ se na prostoru $X$ podrazumeva. Elementi metričkog prostora nazivaju se tačke.

Pojam metrike i metričkog prostora je koristio Freše[1] 1906. godine, ali naziv "metrički prostor" prvi je uveo Hausdorf[2]. Navodimo nekoliko važnih primera metričkih prostora.

[1]Maurice Fréchet (1878-1973), francuski matematičar
[2]Felix Hausdorff (1868-1942), nemački matematičar

**Primer 1.1.1.** Neka je $X$ proizvoljan neprazan skup i neka je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ data formulom

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

za $x, y \in X$. Tada je $(X, d)$ metrički prostor, koji se naziva diskretan prostor, a $d$ je diskretna metrika.

**Primer 1.1.2.** Neka je $X = \mathbb{R}$ skup realnih brojeva, i neka je funkcija $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana kao $d(x,y) = |x-y|$ za $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je skup $\mathbb{R}$ metrički prostor. Ovako definisana metrika u skupu $\mathbb{R}$ je prirodna metrika, ili prirodno rastojanje.

**Primer 1.1.3.** Neka je $X = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Neka je $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, i

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Tada je $d$ Euklidova metrika u skupu $\mathbb{R}^2$.

**Primer 1.1.4.** Neka je $X = \mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, i neka je $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Tada je

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

rastojanje u skupu $\mathbb{R}^3$. I ova metrika se naziva Euklidova metrika.

Dalja konstrukcija važnih metričkih prostora zahteva poznavanje izvesnih fundamentalnih nejednakosti. Stoga dokazujemo prvo nejednakost Heldera, a onda i nejednakost Minkovskog.

Neka je $p, q \in \mathbb{R}$, pri čemu je $1 < p, q < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je $(p, q)$ *par dualnih brojeva*, ili *dualni par brojeva*. U tom slučaju je $p + q = pq$.

**Teorema 1.1.1.** *Ako je $(p, q)$ dualni par brojeva, tada za sve brojeve $a, b \geq 0$ važi nejednakost*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Dokaz.* Neka je $\varphi(t) = t^p/p + t^{-q}/q$ za $t > 0$. Tada je $\varphi'(t) = (t^{p+q} - 1)/t^{q+1}$. Odavde sledi da je $\varphi'(t) < 0$ za $t \in (0,1)$, kao i $\varphi'(t) > 0$ za $t > 1$. Prema tome, funkcija $\varphi$ ima apsolutni minimum u tači $t = 1$, odnosno $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 1$ za svako $t > 0$. Neka je $t = a^{1/q}b^{-1/p}$. Tada je $(a^{1/q}b^{-1/p})^p/p + (a^{1/q}b^{-1/p})^{-q}/q \geq 1$, odnosno $ab \leq a^p/p + b^q/q$. □

**Teorema 1.1.2.** (Nejednakost Heldera[3]) *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, i neka je $(p, q)$ dualni par brojeva. Tada važi*

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

*Dokaz.* Neka je

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}}, \quad B_k = \frac{b_k}{\left(\sum\limits_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Tada je tražena nejednakost Heldera ekvivalentna nejednakosti

$$\sum_{k=1}^n |A_k B_k| \leq 1,$$

pri čemu važi

$$\sum_{k=1}^n |A_k|^p = 1, \quad \sum_{k=1}^n |B_k|^q = 1.$$

Neka je $a = |A_k|$ i $b = |B_k|$, pri čemu je $k = 1, 2, \dots, n$. Primenimo nejednakost dokazanu u Teoremi 1.1.1. Tada je

$$|A_k B_k| \leq \frac{|A_k|^p}{p} + \frac{|B_k|^q}{q}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Sabiranjem svih ovih nejednakosti, proizilazi da važi

$$\sum_{k=1}^n |A_k B_k| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n |A_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n |B_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Time je dokazana nejednakost Heldera. □

[3]Otto Hölder (1859-1937), nemački matematičar

**Teorema 1.1.3.** (Nejednakost Minkovskog[4]) *Neka je* $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. *Tada je*

$$\left( \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{1/p}.$$

*Dokaz.* Ako je $p = 1$, onda je dokaz trivijalan. Stoga pretpostavimo da je $p > 1$. Postoji $q > 1$ sa svojstvom $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Na osnovu nejednakosti Heldera sledi da važi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \\
&\leq \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{qp-q} \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{qp-q} \right)^{1/q} \\
&= \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{1/q} \left( \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{1/p} \right).
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sledi nejednakost Minkovskog. □

Nejednakost Minkovskog omogućava uvođenje metrike u "prostoru sa više dimenzija".

**Primer 1.1.5.** Neka je $X = \mathbb{C}^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$, $p \geq 1$, i neka je $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Funkcija

$$d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

jeste rastojanje u $\mathbb{C}^n$. Ako je $p = 2$, onda je $d_2$ Euklidovo rastojanje.

*Dokaz.* U ovom, kao i u mnogim drugim primerima metričkih prostora, najteže je dokazati nejednakost trougla. U tom cilju, neka je $x =$

[4]Hermann Minkowski (1864-1909), nemački matematičar

$(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$. Neka je $a_i=x_i-z_i$ i $b_i=z_i-y_i$ za $i=1,\dots,n$. Primenimo nejednakost Minkovskog iz Teoreme 1.1.3, i sledi da važi $d_p(x,y)\le d_p(x,z)+d_p(z,y)$. □

Na isti način kao u prethodnom primeru, i skup $\mathbb{R}^n$ jeste metrički prostor u odnosu na metriku $d_p$, za proizvoljno $p\ge 1$.

**Primer 1.1.6.** U skupu $\mathbb{C}^n$ može se uvesti metrika na sledeći način:

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|,$$

ako je $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{C}^n$.

**Posledica 1.1.1.** (Nejednakost Minkovskog za redove) *Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ nizovi kompleksnih brojeva, sa svojstvom da redovi $\sum|a_n|^p$ i $\sum|b_n|^p$ konvergiraju, pri čemu je $p\ge 1$. Tada i red $\sum|a_n+b_n|^p$ konvergira, i važi nejednakost Minkovskog*

$$\left(\sum_{i=1}^\infty|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^\infty|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^\infty|b_i|^p\right)^{1/p}.$$

*Dokaz.* Tvrđenje sledi na osnovu nejednakosti Minkovskog za konačne sume, prelaskom na graničnu vrednost kada $n$ (broj sabiraka) teži beskonačnosti. □

Skup kompleksnih nizova $x=(x_k)_k$ označava se sa $s$. Skup nizova, ili neki specifični podskup od $s$, jeste metrički prostor u odnosu na različito definisane metrike.

Neka je $p\ge 1$. Skup $\ell_p$ se sastoji od svih nizova $x=(x_k)_k$ (realnih ili kompleksnih brojeva), za koje red $\sum\limits_{k=1}^\infty|x_k|^p$ konvergira. U skupu $\ell_p$ metrika se uvodi na sledeći način:

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^\infty|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},\quad x=(x_k)_k,\ y=(y_k)_k\in\ell_p.$$

Ako je $p=2$, onda prostor $\ell_2$ predstavlja neposredno uopštenje Euklidovog prostora $\mathbb{C}^n$.

Neka je $\ell_\infty$ skup svih ograničenih nizova (realnih ili kompleksnih brojeva). Drugim rečima, niz $x = (x_n)_n$ pripada skupu $\ell_\infty$, ako postoji broj $M > 0$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|x_n| < M$. Ako je $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$ i $y = (y_n)_n \in \ell_\infty$, tada je rastojanje u skupu $\ell_\infty$ definisano kao

$$d_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Ako je, recimo $|x_n| \leq M$ i $|y_n| \leq N$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $d_\infty(x, y) \leq M + N$.

Neka je $c$ skup svih konvergentnih nizova, a $c_0$ skup svih nizova brojeva koji konvergiraju ka broju 0. Tada su $c$ i $c_0$ metrički prostori u odnosu na metriku $d_\infty$. Očigledno važi

$$c_0 \subset c \subset \ell_\infty.$$

Ako je $p \geq 1$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergentan brojni red, tada je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, te sledi da važi inkluzija

$$\ell_p \subset c_0.$$

**Definicija 1.1.2.** Neka je $X$ metrički prostor u odnosu na metriku $d$, i neka je $Y \subset X$. Tada je $Y$ takođe metrički prostor, pri čemu je rastojanje u skupu $Y$ indukovano rastojanjem u skupu $X$. Skup $Y$ je metrički potprostor prostora $X$.

**Definicija 1.1.3.** Ako je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, tada je $C[a, b]$ skup svih realnih (ili kompleksnih) neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$.

Skup neprekidnih funkcija na razne načine postaje metrički prostor.

**Primer 1.1.7.** Ako je $f, g \in C[a, b]$, tada je

$$d_\infty(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Prethodni maksimum postoji, jer je $f - g \in C[a, b]$. Nije teško proveriti da je $d_\infty$ metrika u skupu $C[a, b]$.

**Primer 1.1.8.** Neka je $f, g \in C[a, b]$ i

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt.$$

Tada je $d_1$ metrika u skupu $C[a, b]$.

Dokazaćemo nejednakosti Heldera i Minkovskog za integrale.

**Teorema 1.1.4.** (Helder) *Neka je* $(p,q)$ *dualni par brojeva i* $f,g \in C[a,b]$. *Tada je*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{1/q}.$$

*Dokaz.* Ako je $f(t)=0$ za svako $t \in [a,b]$, ili je $g(t)=0$ za svako $t \in [a,b]$, tada je nejednakost očigledna. Prema tome, pretpostavimo da funkcije $f$ i $g$ nisu identički jednake nuli na segmentu $[a,b]$. Iz neprekidnosti funkcija $f$ i $g$ sledi $\int_a^b |f(t)|^p dt > 0$ i $\int_a^b |g(t)|^q dt > 0$. Slično dokazu nejednakosti Heldera za sume, neka je $s \in [a,b]$ i

$$F(s) = \frac{f(s)}{\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}},\ G(s) = \frac{g(s)}{\left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}}.$$

Tada je

$$\int_a^b |F(s)|^p ds = 1 \text{ i } \int_a^b |G(s)|^q ds = 1.$$

Tražena nejednakost Heldera ekvivalentna je nejednakosti

$$\int_a^b |F(s)G(s)|ds \leq 1.$$

Iskoristimo još jednom Teoremu 1.1.1, pri čemu je $a = F(s)$ i $b = G(s)$. Proizilazi da za svako $s \in [a,b]$ važi

$$\frac{|f(s)g(s)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}} \leq \frac{|f(s)|^p}{p\int_a^b |f(t)|^p dt} + \frac{|g(s)|^q}{q\int_a^b |q(t)|^q dt}.$$

Integraljenjem poslednje nejednakosti na segmentu $[a,b]$ sledi traženi rezultat. $\square$

**Posledica 1.1.2.** (Minkovski) *Neka je* $p \geq 1$ *i* $f,g \in C[a,b]$. *Tada je*

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

*Dokaz.* Analogno dokazu odgovarajućeg tvrđenja za sume. □

**Primer 1.1.9.** Neka je $f, g \in C[a,b]$ i $p \geq 1$. Tada je

$$d_p(f,g) = \left( \int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

jedna metrika u skupu $C[a,b]$.

*Dokaz.* Nenegativnost i simetričnost funkcije $d_p$ je očigledna. Nejednakost trougla sledi iz nejednakosti Minkovskog za integrale. Ako je $f(t) = g(t)$ za svako $t \in [a,b]$, onda je $d_p(f,g) = 0$. Sa druge strane, neka je $d_p(f,g) = 0$. To znači da je $\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt = 0$. Fukcija $|f - g|^p$ je neprekidna i nenegativna. Ako je integral ove funkcije jednak nuli, onda i sama funkcija mora biti jednaka nuli u svakoj tački segmenta $[a,b]$. Dakle, $f = g$. □

Nejednakosti Heldera i Minkovskog mogu biti dokazane u opštijem slučaju, ako se pretpostavi da su funkcije $f$ i $g$ integrabilne u Rimanovom smislu na segmentu $[a,b]$.

Opštije, moguće je posmatrati funkcije koje su integrabilne u smislu Lebega[5]. Takođe važe nejednakosti Heldera i Minkovskog. Metrički prostori Lebeg integrabilnih funkcija spadaju u najvažnije metričke prostore u matematici.

**Definicija 1.1.4.** Neka je $X$ metrički prostor i $A, B \subset X$. Rastojanje između skupova $A$ i $B$ definisano je kao

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ako je $A \cap B \neq \emptyset$, tada je $d(A,B) = 0$. Obrnuto tvrđenje ne važi. Neka je $X = \mathbb{R}$ u odnosu na uobičajenu metriku, $a < b < c$, $A = (a,b)$ i $B = (b,c)$. Tada je $d(A,B) = 0$ i $A \cap B = \emptyset$.

**Definicija 1.1.5.** Neka je $X$ metrički prostor, $A \subset X$ i $x \in X$. Tada je rastojanje tačke $x$ od skupa $A$ jednako rastojanju skupa $\{x\}$ od skupa $A$. Drugim rečima,

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

[5]Henri Léon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar

Ako je $x \in A$, tada je $d(x, A) = 0$. Međutim, ako je $d(x, A) = 0$, ne mora biti $x \in A$.

**Definicija 1.1.6.** Neka je $X$ mterički prostor i $A \subset X$. Dijametar skupa $A$ jeste

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Skup $A$ je ograničen u metričkom prostoru $X$, ako je $d(A) < \infty$.

Na kraju, navodimo zanimljiv primer metričkih prostora.

**Primer 1.1.10.** Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ili $f : [a, b] \to \mathbb{C}$) je deo po deo neprekidna, ako u skupu $[a, b]$ postoji konačno mnogo tačaka prekida funkcije $f$. Skup svih deo po deo neprekidnih (realnih ili kompleksnih) funkcija na segmentu $[a, b]$ obeležavamo sa $C_d[a, b]$.

Neka je $p \geq 1$ i neka je

$$d_p(f, g) = \left( \int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right), \quad f, g \in C_d[a, b].$$

Funkcija $d_p$ ima gotovo sve osobine metrike, osim jedne: ako je $d_p(f, g) = 0$, onda se funkcije $f$ i $g$ mogu razlikovati u konačno mnogo tačaka, a to su tačke prekida bar jedne od ove dve funkcije.

Da bi se formalno izbegla prethodna nesaglasnost sa uobičajenim svojstvima metrike, pribegava se sledećoj konstrukciji. U skupu $C_d[a, b]$ uvodi se relacija $\sim$ na sledeći način: $f \sim g$ ako i samo ako je $f = g$ svuda na $[a, b]$, osim eventulano u konačno mnogo tačaka ovog segmenta. Lako je proveriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije u skupu $C_d[a, b]$. Neka je $C_d^*[a, b] = C[a, b]/\sim$. Sada, za $f, g \in C_d[a, b]$ neka su $[f], [g] \in C_d^*[a, b]$ odgovarajuće klase ekvivalencije. Neka je

$$d_p([f], [g]) = \left( \int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Tada $d_p$ ne zavisi od izbora predstavnika klasa ekvivalencije, i $d_p$ je metrika u skupu $C_d^*[a, b]$.

Jednostavno je proveriti da je $C[a, b]$ metrički potprostor od $C_d^*[a, b]$ u odnosu na metriku $d_p$.

Međutim, uobičajeno je da se za prostor $C_d[a, b]$ kaže da je metrički prostor u odnosu na metriku $d_p$, pri čemu se identifikuju funkcije koje su međusobno ekvivalentne u odnosu na relaciju $\sim$. U skladu sa ovom konvencijom, $C[a,b]$ je metrički potprostor od $C_d[a,b]$ u odnosu na metriku $d_p$.

## 1.2 Konvergencija nizova i osobine skupova

Pretpostavljamo nadalje da je $X$ metrički prostor sa metrikom $d$. Ako je $r > 0$ i $a \in X$, onda skupovi $K(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$, $K[a,r] = \{x \in X : d(a,x) \leq r$ i $S(a,x) = \{x \in X : d(a,x) = r\}$, redom, jesu: otvorena kugla, zatvorena kugla i sfera sa centrom u tački $a$ poluprečnika $r$.

**Definicija 1.2.1.** Neka je $X$ metrički prostor i neka je $(a_n)_n$ niz tačaka u $X$. Niz $(a_n)_n$ *konvergira ka tački* $a \in X$ *u odnosu na metriku* $d$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$. U tom slučaju je $\lim a_n = a$, ili $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, i niz $(a_n)_n$ je konvergentan, dok je tačka $a$ granična vrednost niza $(a_n)_n$.

Ako niz $(a_n)_n$ nije konvergentan, onda je divergentan.

Nije teško proveriti sledeće tvrđenje.

**Posledica 1.2.1.** *Neka je $(a_n)_n$ niz u metričkom prostoru $X$, i $a \in X$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ako i samo ako se u svakoj kugli sa centrom u tački $a$ (pozitivnog poluprečnika $r$), nalazi beskonačno mnogo članova niza $(a_n)_n$, dok se van te kugle nalazi konačno mnogo članova pomenutog niza. Pri tome nije važno da li se posmatraju otvorene ili zatvorene kugle sa centrom u tački $a$.*

**Teorema 1.2.1.** *Ako je niz $(a_n)_n$ konvergentan, onda on ima tačno jednu graničnu vrednost.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da niz $(a_n)_n$ konvergira dvema različitim tačkama $a$ i $b$. Neka je $r = d(a,b)$. Kako je $a \neq b$, sledi da je $d > 0$. Posmatrajmo kugle $K(a, d/3)$ i $K(b, d/3)$. Očigledno su ove dve kugle disjunktne. Iz činjenice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sledi da se u kugli $K(a, d/3)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza $(a_n)_n$, dok se van te kugle nalazi konačno mnogo članova ovog niza. To znači da se u kugli $K(b, d/3)$ nalazi konačno mnogo članova niza $(a_n)_n$, što je suprotno pretpostavci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. $\square$

Niz $(a_n)_n$ u metričkom prostoru $X$ je ograničen, ako je skup $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ ograničen. Jednostavno je dokazati sledeću osobinu konvergentnih nizova.

**Teorema 1.2.2.** *Ako je niz $(a_n)_n$ u metričkom prostoru $X$ konvergentan, onda je on ograničen.*

U metričkim prostorima opisujemo specijalne odnose tačaka i skupova. Neka je $a \in X$ i $A \subset X$.

Ako postoji neki broj $r > 0$ tako da je $K(a, r) \subset A$, tada je $a$ *unutrašnja* tačka skupa $A$. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa $A$ označava se sa $\operatorname{int} A$.

Ako za svako $r > 0$ važi $K(a, r) \cap A \neq \emptyset$, tada je $a$ *adherentna* tačka skupa $A$. Skup svih adherentnih tačaka skupa $A$ označava se sa $\operatorname{cl} A$.

Ako postoji niz $(a_n)_n$ različitih tačaka skupa $A$, sa svojstvom da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tada je $a$ tačka *nagomilavanja* skupa $A$. Skup svih tačaka nagomilavanja skupa $A$ označava se sa $\operatorname{acc} A$.

Ako postoji $r > 0$ tako da $K(a, r) \cap A = \{a\}$, tada je $a$ *izolovana* tačka skupa $A$. Skup svih izolovanih tačaka skupa $A$ označava se sa $\operatorname{iso} A$.

Ako za svako $r > 0$ važi $K(a, r) \cap A \neq \emptyset$ i $K(a, r) \cap A^c \neq \emptyset$, onda je $a$ *rubna* tačka skupa $A$. Skup svih rubnih račaka od $A$ označava se sa $\operatorname{bd} A$.

U opštem slučaju važe sledeće inkluzije:

$$\operatorname{int} A, \operatorname{iso} A \subset A \subset \operatorname{cl} A.$$

**Primer 1.2.1.** Neka je $A \subset \mathbb{R}$, tako da je $A = (0, 1] \cup \{2\}$. Tada je $\operatorname{int} A = (0, 1)$, $\operatorname{cl} A = [0, 1] \cup \{2\}$, $\operatorname{acc} A = [0, 1]$, $\operatorname{iso} A = \{2\}$, $\operatorname{bd} A = \{0, 1, 2\}$.

Skup $A$ je *otvoren*, ako je $A = \operatorname{int} A$. Skup $A$ je *zatvoren*, ako je $A = \operatorname{cl} A$. Ako je $x \in \operatorname{int} A$, onda je skup $A$ *okolina* tačke $x$. U narednim teoremama karakterišemo otvorene i zatvorene skupove.

**Teorema 1.2.3.** *Skup $A$ je otvoren ako i samo ako za svako $a \in A$ postoji broj $r > 0$ tako da je $K(a, r) \subset A$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $A$ otvoren skup u $X$. Tada je $A = \operatorname{int} A$. Neka je $a \in A$. Obzirom da je takođe i $a \in \operatorname{int} A$, tada postoji neki broj $r > 0$, tako da je $K(a, r) \subset A$.

Sa druge strane neka za svako $a \in A$ postoji neki broj $r > 0$ sa svojstvom da je $K(a, r) \subset A$. Tada je $a \in \operatorname{int} A$. Sledi $A \subset \operatorname{int} A \subset A$, te je $A = \operatorname{int} A$, odnosno $A$ je otvoren skup. $\square$

**Teorema 1.2.4.** *Skup $A$ je zatvoren, ako i samo ako za svaki niz tačka $(a_n)_n$ skupa $A$ sa svojstvom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, sledi da je $a \in A$.*

*Dokaz.* Neka je $A$ zatvoren skup, odnosno $A = \operatorname{cl} A$. Pretpostavimo da je $(a_n)_n$ niz tačka skupa $A$ sa svojstvom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Neka je $r > 0$. Tada je u kugli $K(a, r)$ beskonačno mnogo tačaka skupa $A$, odakle sledi da je $a \in \operatorname{cl} A$. Kako je $A = \operatorname{cl} A$, sledi $a \in A$.

Sa druge strane, neka za svaki niz $(a_n)_n$ tačaka skupa $A$ sa svojstom da ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, onda je $a \in A$. Neka je $a \in \operatorname{cl} A$ i $r_1 > 0$. Ako je $a \in A$, tvrđenje je dokazano. Pretpostavimo, dakle, $a \notin A$. U skupu $K(a, r_1) \cap A$ postoji tačka $a_1$, tako da je $a_1 \neq a$. Neka je $r_2 = d(a, a_1)/2$. U skupu $K(a, r_2) \cap A$ postoji tačka $a_2$, i tada je $a_2 \neq a, a_1$. Neka je $r_3 = d(a, a_2)/2$. Nastavimo ovaj postupak. Na ovaj način formiramo niz različitih tačaka $(a_n)_n$ skupa $A$, sa očiglednim svojstvom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Na osnovu pretpostavke, $a \in A$. Dakle, $A$ je zatvoren skup. $\square$

**Teorema 1.2.5.** *Skup $A \subset X$ je otvoren ako i samo ako je skup $X \backslash A = A^c$ zatvoren.*

*Dokaz.* Neka je skup $A$ otvoren. Pretpostavimo da je $a \in \operatorname{cl}(A^c) \backslash A^c$. Na osnovu činjenice $a \in A$, sledi da postoji $r > 0$, tako da je $K(a, r) \subset A$. Dakle, $K(a, r) \cap A^c = \emptyset$, te nije moguće $a \in \operatorname{cl}(A^c)$. Dokazali smo da je $\operatorname{cl}(A^c) \setminus A^c = \emptyset$. Uvek važi $A^c \subset \operatorname{cl}(A^c)$, te je zapravo sada $A^c = \operatorname{cl}(A^c)$ i skup $A^c$ je zatvoren.

Sa druge strane, neka je $A^c$ zatvoren skup. Pretpostavimo da je $a \in A$. Iz činjenice da $a \notin A^c = \operatorname{cl}(A^c)$, sledi da postoji $r > 0$, tako da je $K(a, r) \cap A^c = \emptyset$, te je $K(a, r) \subset A$. Na osnovu Teoreme 1.2.3 sledi da je $A$ otvoren skup. $\square$

**Teorema 1.2.6.** *Skup* $\operatorname{int} A$ *je najveći otvoren skup koji je sadržan u skupu $A$.*

*Dokaz.* Na osnovu Teoreme 1.2.3 sledi da je $\operatorname{int} A$ otvoren skup. Pretpostavimo da je $B$ otvoren skup sa svojstvom $\operatorname{int} A \subset B \subset A$, i neka je $a \in B$. Iz činjenice da je $B$ otvoren, i na osnovu Teoreme 1.2.3, sledi da postoji $r > 0$ sa svojstvom $K(a, r) \subset B \subset A$. Tada, na osnovu definicije skupa $\operatorname{int} A$, sledi da je $a \in \operatorname{int} A$. Dakle, $B \subset \operatorname{int} A$, te je $B = \operatorname{int} A$. □

Skup $\operatorname{int} A$ se naziva i *unutrašnjost* skupa $A$.

**Teorema 1.2.7.** *Skup* $\operatorname{cl} A$ *je najmanji zatvoren skup koji sadrži* $A$.

*Dokaz.* Neka je $a \in \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$, i neka je $r > 0$. Tada postoji tačka $b \in K(a, r) \cap \operatorname{cl} A$. Takođe, postoji tačka $c \in K(b, r/2) \cap A$. Prema tome, $c \in K(a, r) \cap A$. Sledi da je $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$, odnosno skup $\operatorname{cl} A$ je zatvoren.

Neka je $B$ proizvoljan zatvoren skup, tako da je $A \subset B \subset \operatorname{cl} A$. Pretpostavimo da je $a \in \operatorname{cl} A$ i neka je $r > 0$. Tada postoji $b \in K(a, r) \cap A$. Sledi da je takođe $b \in K(a, r) \cap B$, te je $b \in \operatorname{cl} B = B$. Dokazali smo da je $\operatorname{cl} A \subset B$, te je $\operatorname{cl} A = B$. □

Skup $\operatorname{cl} A$ se naziva i *zatvorenje* skupa $A$.

Nije teško utvrditi da je $X$ istovremeno i otvoren i zatvoren skup. Sledi da je i $\emptyset$ istovremeno otvoren i zatvoren skup.

Ako je $E \subset X$, tada je $E$ sam za sebe takođe metrički prostor, pri čemu je metrika u skupu $E$ određena (indukovana) metrikom iz skupa $X$.

**Primer 1.2.2.** Neka je $E \subset \mathbb{R}$, i $E = [0, 1] \cup \{2\}$. Tada je skup $\{2\}$ istovremeno otvoren i zatvoren u skupu $E$.

Jednoelementni skup u metričkom prostoru je uvek zatvoren. Prethodni primer pokazuje da jednoelementni skup može biti i otvoren.

**Teorema 1.2.8.** *Ako su* $A$ *i* $B$ *otvoreni skupovi u* $X$*, tada je i* $A \cap B$ *otvoren skup.*

*Dokaz.* Neka je $a \in A \cap B$. Tada postoje pozitivni brojevi $r_1$ i $r_2$, tako da važi $K(a, r_1) \subset A$ i $K(a, r_2) \subset B$. Neka je $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je $K(a, r) \subset A \cap B$. □

**Teorema 1.2.9.** *Neka je* $\{A_i\}_{i \in I}$ *familija otvorenih skupova u* $X$*, pri čemu je* $I$ *proizvoljan indeksni skup. Tada je* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *takođe otvoren skup.*

*Dokaz.* Neka je $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Tada postoji $i_0 \in I$ tako da je $a \in A_{i_0}$. Takođe, postoji broj $r > 0$ tako da je $K(a,r) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Sledi da je $\bigcup_{i\in I} A_i$ otvoren skup. □

Na osnovu Teoreme 1.2.5 proizilazi sledeća karakterizacija zatvorenih skupova.

**Teorema 1.2.10.** *Neka su $A$, $B$ i $A_i$ $(i \in I)$ zatvoreni skupovi, pri čemu je $I$ proizvoljan indeksni skup. Tada su $A \cup B$ i $\bigcap_{i\in I} A_i$ takođe zatvoreni skupovi.*

Na osnovu Teoreme 1.2.9 sledi da je konačan skup uvek zatvoren.

Lako je proveriti da je skup $K(a,r)$ otvoren skup, dok je $K[a,r]$ zatvoren skup. Međutim, u opštem slučaju je $\operatorname{cl} K(a,r) \neq K[a,r]$.

**Primer 1.2.3.** Neka je $X$ proizvoljan neprazan skup i neka je $d$ diskretna metrika u skupu $X$. Neka je $a \in X$. Tada je $K(a,1) = \{a\} = \operatorname{cl} K(a,1)$, dok je $K[a,1] = X$.

Opisaćemo skup tačaka nagomilavanja nekog skupa.

**Teorema 1.2.11.** *Neka je $a \in X$ i $A \subset X$. Tada je $a \in \operatorname{acc} A$ ako i samo ako za svako $r > 0$ važi $(K(a,r) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$.*

*Dokaz.* Neka je $a \in \operatorname{acc} A$ i neka je $r > 0$. Postoji niz različitih tačaka $(a_n)_n$ skupa $A$, tako da važi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. U skupu $K(a,r)$ je beskonačno mnogo članova ovog niza. Kako su svi članovi ovog niza međusobno različiti, onda se svi oni (sa izuzetkom, eventualno, nekog člana koji je jednak $a$) nalaze u skupu $(K(a,r) \cap A) \setminus \{a\}$.

Sa druge strane, pretostavimo da je $r_1 > 0$. Postoji tačka $a_1 \in K(a,r_1) \cap A$ sa svojstvom $a_1 \neq a$. Neka je $r_2 = d(a,a_1)/2$. Tada postoji tačka $a_2 \in K(a,r_2)$ sa svojstvom $a_2 \neq a$. Takođe je $a_2 \neq a_1$. Nastavljajući postupak, dolazimo do niza međusobno različitih tačaka $a_n \in A$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Prema tome, $a \in \operatorname{acc} A$. □

Na osnovu prethodnog razmatranja zaključujemo da za dati skup $A \subset X$, svaka tačka $a \in A$ jeste ili izolovana tačka skupa $A$, ili je tačka nagomilavanja skupa $A$.

Jednostavno je dokazati sledeća tvrđenja.

**Teorema 1.2.12.** *Ako je $A \subset X$, tada je $\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl}(A^c)$, i $\operatorname{bd} A$ je zatvoren skup.*

**Teorema 1.2.13.** *Ako je $A \subset X$, tada je* $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{acc} A$.

Skup $A$ je *svuda gust* u metričkom prostoru $X$, ako je $\operatorname{cl} A = X$. Ako je $A, B \subset X$, tada je $A$ svuda gust u skupu $B$, ako je $B \subset \operatorname{cl} A$.

**Posledica 1.2.2.** *Neka je $A, B \subset X$. Skup $A$ je svuda gust u skupu $B$ ako i samo ako za svako $b \in B$ i svako $r > 0$ važi $K(b, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je svuda gust u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, kao i u skupu iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$. Takođe, skup $\mathbb{I}$ je svuda gust u skupu $\mathbb{R}$ i u skupu $\mathbb{Q}$.

Skup $A$ je *nigde gust*, ako je $\operatorname{int}(\operatorname{cl} A) = \emptyset$.

Skup celih brojeva $\mathbb{Z}$ je nigde gust. Ako su $A$ i $B$ nigde gusti skupovi, onda je i $A \cup B$ nigde gust skup (proveriti!). Međutim, ako je $(A_n)_n$ niz nigde gustih skupova, nije obavezno i $\bigcup_n A_n$ nigde gust skup! Na primer, skup $\mathbb{Q}$ nije nigde gust, ali je $\mathbb{Q}$ prebrojiva unija jednoelementih (dakle, nigde gustih) skupova u $\mathbb{R}$.

Skup $A$ je *savršen* (*perfektan*), ako mu pripadaju sve njegove tačke nagomilavanja, i ako je svaka njegova tačka istovremeno i njegova tačka nagomilavanja. Drugim rečima, $A$ je perfektan, ako je $A = \operatorname{acc} A$. Jednostavno je proveriti da svaki perfektan skup mora biti zatvoren.

Očigledno, segment $[a, b]$ je savršen skup, ako se posmatra u prostoru $\mathbb{R}$.

## 1.3 Kantorov skup

U ovoj sekciji opisan je Kantorov[6] skup, koji je podskup segmenta $[0, 1]$. Ovaj karakteristični skup je primer izvesnih važnih osobina podskupova realne prave.

Posmatrajmo segment $I_0 = [0, 1]$. Neka je $U_1 = (1/3, 2/3)$ i $I_1 = I_0 \setminus U_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Neka je $U_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$, itd. U koraku po redu $k$ izbacujemo $2^{k-1}$ središnjih intervala dužine po $1/3^k$, i unije izbačenih intervala u $k$-tom koraku označavamo sa $U_k$. Ono što ostaje od segmenta $[0, 1]$ označavamo sa $I_k$. Neka je $K = \bigcap_k I_k$. Skup $K$ je Kantorov skup na segmentu $[0, 1]$.

[6]Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845-1918), nemački matematičar

**Teorema 1.3.1.** *Kantorov skup je neprebrojiv nigde gust skup u* $\mathbb{R}$. *Štaviše, Kantorov skup je perfektan.*

*Dokaz.* Svaki skup $U_k$ je otvoren, jer je konačna unija otvorenih intervala. Sledi da je skup $I_k = [0,1] \cap (U_k)^c$ zatvoren. Prema tome, $K$ je zatvoren skup, kao presek zatvorenih skupova.

Skup $K$ je nigde gust, ako dokažemo da je $\operatorname{int} K = \emptyset$. Pretpostavimo da je $x \in K$ i neka je $\epsilon > 0$. Sledi $x \in I_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Svaki skup $I_k$ je disjunktna unija $2^k$ segmenta dužine po $1/3^k$, i neka su to segmenti $I_k^j$, $j = 1, \ldots, 2^k$. Neka je $1/3^k < \epsilon$. Tada $x$ pripada tačno jednom segmentu $I_k^j$ dužine $1/3^k$ (za tačno jedno $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$). U sledećem koraku iz sredine segmenta $I_k^j$ izbacujemo centralni interval dužine $1/3^{k+1}$. Sada je očigledno da u $\epsilon$-okolini tačke $x \in K$ postoje i tačke skupa $U_{k+1}$. Prema tome, $x$ ne može biti unutrašnja tačka skupa $K$, te je skup $K$ nigde gust.

Na osnovu prethodnog razmatranja lako je zaključiti da u $\epsilon$-okolini proizvoljne tačke $x \in K$ postoje tačke $y \in K$, za koje je $y \neq x$. Prema tome, $x$ je tačka nagomilavanja skupa $K$. Sledi da je $K$ savršen skup.

Razmotrimo zapis realnih brojeva segmenta $[0,1]$ u brojnom sistemu sa osnovom 3. Na primer,

$$(0,121)_3 = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}.$$

Lako je utvrditi da se mogu isključiti svi zapisi koji na kraju imaju beskonačno mnogo cifara 2, kao što je, na primer:

$$\begin{aligned}(0,122\ldots)_3 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} = (0,2)_3.\end{aligned}$$

Isključujući ovakve zapise sa beskonačno mnogo cifara 2 na kraju, sledi da svaki broj iz skupa $[0,1]$ ima jedinstven prikaz u brojnom sistemu sa osnovom 3.

Vratimo se konstrukciji Kantorovog skupa. U prvom koraku izbacujemo interval $(1/3, 2/3)$, a to su svi brojevi iz intervala $(0,1;0,2)_3$, odnosno brojevi koji u brojnom sistemu sa osnovom 3 ne dozvoljavaju pojavljivanje cifre 2 na prvom mestu iza zareza (na prvoj "decimali"). U drugom koraku izbacujemo intervale $(1/9, 2/9)$ i $(7/9, 8/9)$, a ovi intervali u brojnom sistemu sa osnovom 3 jesu $(0,01; 0,02)_3$ i $(0,21; 0,22)_3$. Dakle, u drugom koraku izbacujemo sve realne brojeve segmenta $[0, 1]$, koji u brojnom sistemu sa osnovom 3 ne dozvoljavaju pojavljivanje cifre 2 na drugoj "decimali". Nastavljajući postupak, proizilazi da izbacujemo sve realne brojeve koji u brojnom sistemu sa osnovom 3 sadrže bar jednu cifru 2. Sledi da se u Kantorovom skupu $K$ nalaze tačno oni realni brojevi koji u svom zapisu u brojnom sistemu sa osnovom 3, sadrže samo cifre 0 i 1.

Metoda, koja se koristi u nastavku dokaza, naziva se *Kantorov metod dijagonalizacije*. Pretpostavimo da je skup $K$ prebrojiv i neka je $K = \{x_1, x_2, \dots\}$. Tada je

$$\begin{aligned} x_1 &= (0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots)_3, \\ x_2 &= (0, x_{21}x_{22}x_{23}\dots)_3, \\ x_3 &= (0, x_{31}x_{32}x_{33}\dots)_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

pri čemu je $x_{ij} \in \{0, 1\}$. Neka je za svako $i \in \mathbb{N}$:

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_{ii} = 1, \\ 1, & x_{ii} = 0, \end{cases}$$

Tada se broj $y = (0, y_1y_2y_3\dots)_3$ sastoji samo od cifara 0 i 1, odakle sledi $y \in K$. Sa druge strane, očigledno je $y \neq x_i$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Dakle, nije moguće da je $K$ prebrojiv skup. □

Na kraju sekcije procenimo dužinu svih izbačenih intervala $U_k$, prilikom konstrukcije skupa $K$. $U_1$ je jedan interval dužine $1/3$, $U_2$ se sastoji od dva intervala dužine po $1/9$, $U_3$ se sastoji od 4 intervala dužina po $1/27$. U opštem slučaju, $U_k$ se sastoji od $2^{k-1}$ intervala, od kojih je svaki dužine $1/3^k$. Dakle, suma dužina svih izbačenih intervala jednaka je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1.$$

Prethodna činjenica je posebno interesantna za izračunavanje dužine (Lebegove mere) skupa $K$. Dakle, dužina skupa $K$ jednaka je 0. Ovom prilikom ne diskutujemo zašto se može izračunati dužina skupa $K$.

## 1.4 Kompletni metrički prostori

Iz ranijih kurseva matematičke analize dobro je poznat Košijev[7] kriterijum za konvergenciju nizova. U proizvoljnim metričkim prostorima ovaj kriterijum ne važi, kao što ćemo kasnije pokazati.

**Definicija 1.4.1.** Niz $(a_n)_n$ je *Košijev niz* u metričkom prostoru $X$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n, m \in \mathbb{N}$ važi implikacija

$$n, m \geq n_0 \implies d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

**Teorema 1.4.1.** *Svaki konvergentan niz je Košijev.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $(a_n)_n$ konvergentan niz. Tada postoji $a \in X$ tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Neka je $\epsilon > 0$. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $d(a_n, a) < \epsilon/2$. Pretpostavimo da je $n, m \geq n_0$. Tada je

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Time je dokazano da je niz $(a_n)_n$ Košijev. $\square$

Nije svaki Košijev niz u metričkom prostoru obavezno i konvergentan, kao što pokazuju sledeći primeri.

**Primer 1.4.1.** Skup $\mathbb{Q}$ je metrički prostor, koji je sadržan u metričkom prostoru $\mathbb{R}$, u odnosu na uobičajeno rastojanje. Neka je $(a_n)_n$ niz racionalnih brojeva, koji konvergira iracionalonom broju $a$. Tada je niz $(a_n)_n$ Košijev, jer važi Košijeva teorema za konvergenciju nizova u $\mathbb{R}$. Sa druge strane, niz $(a_n)_n$ nije konvergentan u metričkom prostoru $\mathbb{Q}$. Suština ovog primera jeste da $\mathbb{Q}$ nije zatvoren podskup od $\mathbb{R}$.

Sledeći primer je manje elementaran, ali veoma zanimljiv.

**Primer 1.4.2.** Neka je $X = C[0, 1]$, u kome je definisana metrika $d_1$. Tada postoji Košijev niz u $X$, koji nije konvergentan u $X$.

*Dokaz.* Neka je $f_1(x) = x$ za svako $x \in [0, 1]$. Neka je $f_2(x) = 0$ za $x \in [0, 1/4]$, $f_2(x) = 1$ za $x \in [3/4, 1]$, i neka je $f_2$ linearna funkcija

[7] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematiăr

na segmentu $[1/4, 3/4]$, tako da grafik ove funkcije spaja tačke $(1/4, 0)$ i $(3/4, 1)$. Dalje, neka je $f_3(x) = 0$ za $x \in [0, 1/3]$, $f_3(x) = 1$ za $x \in [2/3, 1]$, i neka je $f_3$ linearna funkcija na segmentu $[1/3, 2/3]$, tako da grafik funkcije $f_3$ spaja tačke $(1/3, 0)$ i $(2/3, 1)$. Nastavimo postupak za svaki prirodan broj $n$. Tada je $f_n(x) = 0$ za svako $x \in [0, 1/2 - 1/(2n)]$, $f_n(x) = 1$ za svako $x \in [1/2 + 1/(2n), 1]$, i $f_n$ je linearna funkcija na segmentu $[1/2 - 1/(2n), 1/2 + 1/(2n)]$, tako da grafik funkcije $f_n$ spaja tačke $(1/2 - 1/(2n), 0)$ i $(1/2 + 1/(2n), 1)$.

Neka je $f(x) = 0$ za $x \in [0, 1/2)$, $f(x) = 1$ za $x \in (1/2, 1]$, i $f(1/2) = \alpha \in \mathbb{R}$. Očigledno, $f \notin C[0, 1]$, ali $f \in C_d[0, 1]$. Sa druge strane,

$$d_1(f_n, f) = \frac{1}{4n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Prema tome, niz $(f_n)_n$ konvergira u smislu metrike $d_1$ ka funkciji $f \in C_d[0, 1]$. Ova funkcija je jedinstveno definisana svuda, osim u konačno mnogo tačaka prekida (videti Primer 1.1.10).

Pretpostavimo da postoji funkcija $g \in C[0, 1]$, dako da $(f_n)_n$ konvergira ka $g$ u smislu metrike $d_1$. Granična vrednost niza funkcija u metričkom prostoru $C_d[a, b]$ je jedinstvena, tako da mora biti $f = g$ svuda, osim eventualno u konačno mnogo tačaka. Poslednje tvrđenje očigledno nije moguće, zbog neprekidnosti funkcije $g$.

Dakle, niz $(f_n)_n$ ne konvergira nekoj funkciji iz skupa $C[a, b]$ u smislu metrike $d_1$.

Neka je $m > n$. Tada je

$$d_1(f_n, f_m) = \frac{m - n}{4mn} \to 0 \ (m > n, \ n \to \infty).$$

Sledi da je $(f_n)_n$ Košijev niz u $C[0, 1]$. □

Dakle, Košijev niz ne mora biti konvergentan. Sa druge strane, jednostavno je dokazati sledeći rezultat.

**Teorema 1.4.2.** *Svaki Košijev niz je ograničen.*

**Teorema 1.4.3.** *Ako je $(x_n)_n$ Košijev niz, i ako postoji njegov podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira ka tački $a \in X$, tada i niz $(x_n)_n$ konvergira ka tački $a$.*

*Dokaz.* Neka je $\epsilon > 0$. Niz $(x_n)_n$ je Košijev, i zato postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n, m \geq n_0$ važi $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Sa druge strane, $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$, te postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $k \geq k_0$ važi $d(x_{n_k}, a) < \epsilon$. Neka je $n_1 = \max\{n_0, n_{k_0}\}$, $n \geq n_1$, i $k \geq k_0$ tako da je $n_k \geq n_1$. Tada je

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < 2\epsilon.$$

Time smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

**Definicija 1.4.2.** Metrički prostor je *kompletan*, ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.

Prostori $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ u odnosu na uobičajene metrike, jesu kompletni. Štaviše, ovi prostori su kompletni i u odnosu na metriku $d_p$. Dokaz je analogan dokazu u sledećem primeru.

**Teorema 1.4.4.** *Prostor $\ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ je kompletan.*

*Dokaz.* Neka je $(x_n)_n$ Košijev niz u $\ell_p$, i neka je $\epsilon > 0$. Postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $m, n \geq n_0$ važi $d_p(x_n, x_m) < \epsilon$. Primetimo da je $x_n$ takođe jedan niz brojeva, recimo $x_n = (a_k^n)_k$. Tada je

$$d_p(x_n, x_m) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k^m|^p\right)^{1/p} < \epsilon.$$

Očigledno je $|a_k^n - a_k^m| \leq d_p(x_n, x_m) < \epsilon$ za svako $m, n \geq n_0$ i za svako $k \in \mathbb{N}$. Sledi da je $(a_k^n)_n$ jedan Košijev niz u $\mathbb{R}$ (ili u $\mathbb{C}$, ako posmatramo kompleksne nizove). Prostor $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) je kompletan, te sledi da je niz $(a_k^n)_n$ konvergentan za svako $k \in \mathbb{N}$. Drugim rečima, za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji broj $a_k$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^n = a_k$.

Dokazaćemo da niz $a = (a_k)_k$ pripada prostoru $\ell_p$. Niz $(x_n)_n$ je Košijev, pa je ograničen u prostoru $\ell_p$. Prema tome, postoji neki broj $M > 0$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(d_p(x_n, 0))^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^p \leq M.$$

Ovde je $0 = (0, 0, \ldots)$ nula-niz, koji očigledno pripada prostoru $\ell_p$. Specijalno, za svako $t \in \mathbb{N}$ važi

$$\sum_{k=1}^{t} |a_k^n|^p \leq M.$$

Neka sada $n \to \infty$. Sledi da važi

$$\sum_{k=1}^{t} |a_k|^p \leq M.$$

Neka $t \to \infty$. Važi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \leq M$, odakle sledi $a = (a_k)_k \in \ell_p$.

Na kraju, treba dokazati $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ u smilu metrike $d_p$. Ako je $t \in \mathbb{N}$, tada je očigledno, za $m, n \geq n_0$:

$$\sum_{k=1}^{t} |a_k^n - a_k^m|^p < \epsilon^p.$$

Ako $m \to \infty$, onda je

$$\sum_{k=1}^{t} |a_k^n - a_k|^p \leq \epsilon^p.$$

Neka sada $t \to \infty$. Proizilazi da važi

$$(d_p(x_n, a))^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^p \leq \epsilon^p.$$

Ovim je dokazano $\lim\limits_{n\to\infty} d_p(x_n, a) = 0$, te je prostor $\ell_p$ kompletan. □

**Teorema 1.4.5.** *Prostor $\ell_\infty$ je kompletan.*

*Dokaz.* Neka je $(x_n)_n$ Košijev niz u $\ell_\infty$. Važi $x_n = (a_k^n)_k$ i $a_k^n$ su (realni ili kompleksni) brojevi. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m, n \geq n_0$ važi

$$d_\infty(x_n, x_m) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k^n - a_k^m| < \epsilon.$$

Za svako $k \in \mathbb{N}$ i svako $m, n \geq n_0$ važi

$$|a_k^n - a_k^m| < \epsilon.$$

Sledi da je za svako $k \in \mathbb{N}$ niz $(a_k^n)_n$ Košijev niz brojeva. Prema tome, za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji broj $a_k$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^n = a_k$.

Niz $(x_n)_n$ je Košijev, pa je ograničen u $\ell_\infty$. Sledi da postoji $M > 0$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$d_\infty(x_n, 0) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k^n| \leq M.$$

Još jednom, $0 = (0, 0, \ldots)$ je nula-niz koji pripada prostoru $\ell_\infty$. Specijalno, za svako $n, k \in \mathbb{N}$ je $|a_k^n| \leq M$. Neka $n \to \infty$. Tada za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $|a_k| \leq M$. Prema tome, $\max\limits_k |a_k| \leq M$, te je $a = (a_k)_k \in \ell_\infty$.

Posmatramo nejednakost

$$|a_k^m - a_k^n| < \epsilon,$$

koja važi za svako $m, n \geq n_0$. Neka $m \to \infty$. Sledi da za svako $n \geq n_0$ važi

$$|a_k^n - a_k| \leq \epsilon.$$

To upravo znači $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(x_n, a) = 0$, te je prostor $\ell_\infty$ kompletan. $\square$

**Teorema 1.4.6.** *Prostor $C[a, b]$ je kompletan u odnosu na metriku $d_\infty$.*

*Dokaz.* Neka je $(f_n)_n$ Košijev niz u $C[a, b]$ i neka je $\epsilon > 0$. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $m, n \geq n_0$ važi

$$d_\infty(f_n, f_m) = \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon.$$

Neka je $t \in [a, b]$ fiksiran broj i $n, m \geq n_0$. Tada je

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon.$$

Sledi da je $(f_n(t))_n$ Košijev niz brojeva, za svako fiksirano $t \in [a, b]$. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$. Očigledno, $f$ je funkcija definisana na segmentu $[a, b]$.

Podsetimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $m, n \geq n_0$ i svako $t \in [a, b]$ važi nejednakost

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon.$$

Neka $m \to \infty$. Tada sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$ i svako $t \in [a, b]$ važi $|f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$. Sledi da je $f$ uniformna granična vrednost niza neprekidnih funkcija $(f_n)_n$. Onda je $f$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$, i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ u smislu metrike $d_\infty$. Prema tome, $C[a, b]$ je kompletan metrički prostor u odnosu na metriku $d_\infty$. $\square$

**Primer 1.4.3.** Prostori $C[a,b]$ i $C_d[a,b]$ nisu kompletni u odnosu na metrike $d_p$, za $1 \leq p < \infty$.

Neka je $(x_n)_n$ niz tačaka u metričkom prostoru $X$, i neka je $(r_n)_n$ niz pozitivnih brojeva. Ako je

$$K[x_1, r_1] \supset K[x_2, r_2] \supset \cdots$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, tada je $K_n = K[x_n, r_n]$ niz monotono opadajućih zatvorenih kugli, čiji poluprečnici teže ka nuli.

Dokazujemo jednu karakterizaciju kompletnih metričkih prostora.

**Teorema 1.4.7.** *Metrički prostor $X$ je kompletan, ako i samo ako za svaki niz $(K_n)_n$ monotono opadajućih zatvorenih kugli, čiji poluprečnici teže nuli, važi $\bigcap_n K_n = \{a\}$ za neko $a \in X$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $X$ kompletan metrički prostor. Neka je $K_n = K[x_n, r_n]$ monotono opadajući niz zatvorenih kugli, i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Neka je $\epsilon > 0$. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$ važi $r_n < \epsilon$. Neka je $m > n$. Tada je $K_m \subset K_n$, te je $d(x_m, x_n) < r_n < \epsilon$. Tada je $(x_n)_n$ Košijev niz u $X$. Prostor $X$ je kompletan, pa postoji tačka $a \in X$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada $x_n, x_{n+1}, \ldots \in K_n$. Kako je $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$, sledi da je $a \in \operatorname{acc} K_n$. $K_n$ je zatvoren skup, te je $a \in K_n$. Broj $n \in \mathbb{N}$ je proizvoljan, odakle sledi $a \in \bigcap_n K_n$. Iz činjenice $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ proizilazi da ne može još koja tačka prostora $X$ pripadati skupu $\bigcap_n K_n$. Konačno, $\bigcap_n K_n = \{a\}$.

Sa druge strane, pretpostavimo da $X$ nije kompletan metrički prostor. Neka je $(x_n)_n$ Košijev niz u $X$, koji nije konvergentan. Neka je, recimo, $\epsilon_i = \frac{1}{2^i}$, pri čemu je $i \in \mathbb{N}$. Tada postoji broj $n_i \in \mathbb{N}$ (bez gubljenja opštosti, $n_i > n_{i-1}$), tako da za svako $m \geq n_i$ važi

$$d(x_m, x_{n_i}) < \frac{1}{2^i}.$$

Neka je $K_i = K[x_{n_i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$, $i \in \mathbb{N}$. Na osnovu $d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$ sledi $K_i \supset K_{i+1}$. Dakle, $K_i$ je niz monotono opadajućih zatvorenih kugli, čiji poluprečnici teže nuli.

Pretpostavimo da postoji $a \in \bigcap_i K_i$. Tada za svako $i \in \mathbb{N}$ važi $d(a, x_{n_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$. Neka je $m \geq n_i$. Tada je

$$d(a, x_m) \leq d(a, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m) < \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^i}.$$

Odavde bi sledilo $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, što je po pretpostavci nemoguće. $\square$

Jednostavno je dokazati sledeći rezultat.

**Teorema 1.4.8.** *Neka je $X$ kompletan metrički prostor, i neka je $Y$ je potprostor od $X$. Tada je $Y$ kompletan metrički prostor ako i samo ako je $Y$ zatvoren u prostoru $X$.*

**Definicija 1.4.3.** Neka je $X$ metrički prostor i $A \subset X$. Skup $A$ je skup *prve kategorije*, ako je $A$ najviše prebrojiva unija nigde gustih skupova.

Svi skupovi koji nisu prve kategorije, jesu skupovi *druge kategorije*.

Sledeći rezultat je poznat kao Berova teorema o kategorijama.

**Teorema 1.4.9.** (Ber[8]) *Svaki kompletan metrički prostor je skup druge kategorije.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $X$ kompletan metrički prostor, i da je $X$ prve kategorije. Tada je $X = \bigcup_n F_n$ pri čemu su $F_n$ nigde gusti skupovi. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da su $F_n$ zatvoreni skupovi.

Skup $F_1^c$ je otvoren i neprazan (skup $X$ ne može imati praznu unutrašnjost). Stoga postoji neka kugla $J_1 \subset F_1^c$, koja je poluprečnika $r_1 < 1$. Neka je $K_1$ zatvorena kugla, koncentrična sa $J_1$, poluprečnika $r_1/2$. Skup $F_2$ ne sadrži ni jednu kuglu, te je otvoreni skup $F_2^c \cap (\operatorname{int} K_1)$ neprazan. Ovaj skup sadrži kuglu $J_2$ poluprečnika $r_2 < 1/2$. Neka je $K_2$ zatvorena kugla koncentrična sa $J_2$, poluprečnika $r_2/2$.

Nastavljajući ovaj postupak, formiramo nizove kugli $(J_n)_n$ i $(K_n)_n$, poluprečnika redom, $r_n < 1/n$ i $r_n/2$, i sve kugle $K_n$ su zatvorene. Pri tome važi

$$K_n \subset J_n \subset F_n^c,\ K_{n+1} \subset K_n.$$

Tada je

$$\bigcap_n K_n \subset \bigcap_n J_n \subset \left(\bigcup_n F_n\right)^c = X^c = \emptyset,$$

[8] René-Luis Baire (1874-1932), francuski matematičar

što povlači $\bigcap K_n = \emptyset$. Poslednja jednakost je nemoguća, jer je $X$ kompletan metrički prostor, a $(K_n)_n$ je niz monotono opadajućih zatvorenih kugli, čiji poluprečnici teže nuli. $\square$

## 1.5 Kompletiranje metričkih prostora

U prethodnoj sekciji prikazan je značaj kompletnih metričkih prostora. Ako je dat metrički prostor $X$ koji nije kompletan, od interesa je naći najmanji kompletan metrički prostor $X^*$, koji sadrži $X$.

**Definicija 1.5.1.** Metrički prostori $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ su međusobno *izometrični*, ako postoji bijekcija $F : X \to Y$, tako da za svako $x, y \in X$ važi $d_X(x, y) = d_Y(F(x), F(y))$.

**Definicija 1.5.2.** Neka su $(X, d)$ i $(X^*, d^*)$ metrički prostori, pri čemu $X$ nije kompletan, a $X^*$ je kompletan. Prostor $X^*$ je *kompletizacija* prostora $X$, ako postoji potprostor $Y$ od $X^*$ sa svojstima: $X$ i $Y$ su međusobno izometrični, i $\mathrm{cl}\, Y = X^*$.

**Teorema 1.5.1.** *Neka je $X$ nekompletan metrički prostor. Tada postoji kompletizacija $X^*$ metričkog prostora $X$.*

*Dokaz.* Neka je $K(X)$ skup svih Košijevih nizova u $X$. Drugim rečima, ako je $x = (x_n)_n$ niz elemenata prostora $X$, tada je $(x_n)_n \in K(X)$ ako i samo ako je $(x_n)_n$ Košijev niz u $X$. U skupu $K(X)$ definišemo relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \text{ ako i samo ako } \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Jednostavno je dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije u skupu $K(X)$. Ako važi $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, onda jednostavno kažemo da su nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ ekvivalentni. Posmatramo količnički skup $X^* = K(X)/\sim$. Ako je $(x_n)_n \in K(X)$, onda je

$$x^* = [(x_n)_n]_\sim = \{(z_n)_n \in K(X) : (x_n)_n \sim (z_n)_n\} \in K(X)/\sim .$$

Ako je $y^* = [(y_n)_n]_\sim \in K(X)/\sim$, tada je $x^* \neq y^*$ ako i samo ako nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nisu međusobno ekvivalentni.

Definišimo funkciju $d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}$ na sledeći način. Ako je $x^* = [(x_n)_n]_\sim, y^* = [(y_n)_n]_\sim \in X^*$, tada neka je

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Dokazaćemo da prethodna granična vrednost uvek postoji u skupu $\mathbb{R}$, zatim da ta granična vrednost ne zavisi od izbora predstavnika klasa ekvivalencije, i na kraju da je $d^*$ metrika na skupu $X^*$.

Na osnovu $d(x, y) \le d(x, z)+d(z, y)$ sledi $|d(x, y)-d(x, z)| \le d(y, z)$. Neka je $m, n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned} & |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \\ \le\ & |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_n, y_n)| \\ \le\ & d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \to 0,\ m > n,\ n \to \infty. \end{aligned}$$

Dakle, $(d(x_n, y_n))_n$ je Košijev niz u $\mathbb{R}$, i stoga je konvergentan. Prema tome, postoji $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ u skupu $\mathbb{R}$.

Neka je $x^* = [(x_n)_n]_\sim = [(x'_n)_n]_\sim$ i $y^* = [(y_n)_n]_\sim = [(y'_n)_n]_\sim$. Važi

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| &\le |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| + |d(x'_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \\ &\le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0,\ n \to \infty. \end{aligned}$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$, odnosno funkcija $d^*$ ne zavisi od izbora predstavnika klasa ekvivalencija.

Da bi pokazali da je $d^*$ metrika, dovoljno je dokazati da funkcija $d^*$ zadovoljava nejednakost trougla, jer ostale osobine metrike slede trivijalno. Neka je $x^* = [(x_n)_n]_\sim$, $y^* = [(y_n)_n]_\sim$ i $z^* = [(z_n)_n]_\sim$. Tada je

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)_n.$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $n \to \infty$, proizilazi da važi $d^*(x^*, y^*) \le d^*(x^*, z^*) + d^*(z^*, y^*)$. Time je dokazana nejednakost trougla za funkciju $d^*$.

Sada konstruišemo prostor $Y$ za koji je $Y \subset X^*$. Ako je $x^* \in K(X)/\sim$, tada $x^* \in Y$ ako i samo ako postoji neki elemenat $x \in X$, tako da konstantan niz $(x)_n$ pripada klasi ekvivalencije $x^*$. Drugim rečima, ako je $x_n = x$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda se $x^*$ može prikazati kao $x^* = [(x_n)_n]_\sim$. Ovu činjenicu zapisujemo kao $x^* = [(x)_n]_\sim$.

Ako bi, recimo, važilo $x^* = [(x)_n]_\sim = [(y)_n]_\sim$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,y) = 0$, odnosno $x = y$. Prema tome, ako $x^* \in Y$, tada postoji samo jedan elemenat $x \in X$, tako da važi $x^* = [(x)_n]_\sim$. Obrnuto, ako je $x \in X$, onda očigledno $[(x)_n]_\sim \in Y$.

Neka je $F : X \to Y$ preslikavanje definisano na sledeći način:

$$F(x) = [(x)_n]_\sim = x^* \in Y, \quad x \in X.$$

Na osnovu prethodno rečenog, $F$ je bijekcija iz skupa $X$ na skup $Y$. Neka je $x, y \in X$, $x^* = [(x)_n]_\sim, y^* = [(y)_n]_\sim \in Y$. Tada je

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y).$$

Sledi da su metrički prostori $(X, d)$ i $(Y, d^*)$ međusobno izometrični.

Dokazaćemo da je $\operatorname{cl} Y = X^*$. Neka je $x^* = [(x_n)_n]_\sim \in X^*$, i neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $m, n \geq n_0$ važi $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Posmatramo konstantni niz $y^* = [(x_{n_0})_n]_\sim$. Tada je

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) \leq \epsilon.$$

To znači da u $\epsilon$-okolini tačke $x^* \in X^*$ postoji tačka $y^* \in Y$. Prema tome, $X = \operatorname{cl} Y$. Time smo dokazali da je $Y$ svuda gust u $X^*$.

Na samom kraju, ostaje da dokažemo da je $X^*$ kompletan metrički prostor. Neka je $(x_n^*)_n$ Košijev niz u $X^*$. Potprostor $Y$ je svuda gust u $X^*$, i stoga za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n^* \in Y$, sa svojstvom da je $d^*(x_n^*, y_n^*) < \frac{1}{n}$. Ako je $m, n \in \mathbb{N}$, onda važi

$$d^*(y_n^*, y_m^*) \leq d^*(y_n^*, x_n^*) + d^*(x_n^*, x_m^*) + d^*(x_m^*, y_m^*) < \frac{1}{n} + d^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m}.$$

Sledi da je $(y_n^*)_n$ Košijev niz u $X^*$. Sa druge strane, $y_n^* \in Y$, te je $y_n^* = [(x_n)_k]_\sim$, gde je $x_n \in X$ i $(x_n)_k$ je konstantan niz (po indeksu $k$). Sledi da je

$$d^*(y_n^*, y_m^*) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_m) = d(x_n, x_m).$$

Kako je $(y_n^*)_n$ Košijev niz u $X^*$, sledi da je $(x_n)_n$ Košijev niz u $X$, odnosno $(x_n)_n \in K(X)$. Tada postoji $x^* \in X^*$ tako da je $x^* = [(x_n)_n]_\sim$.

Dokazaćemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x^*$. Neka je $\epsilon > 0$. Niz $(x_n)_n$ je Košijev, i onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n, k \geq n_0$ važi

$$\frac{1}{n} + d(x_n, x_k) < \epsilon.$$

Za $n \geq n_0$ ispunjeno je

$$d^*(x_n^*, x^*) \leq d^*(x_n^*, y_n^*) + d^*(y_n^*, x^*) < \frac{1}{n} + \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k) \leq \epsilon.$$

Očigledno, $\lim_{n\to\infty} d^*(x_n^*, x^*) = 0$. Prema tome, niz $(x_n^*)_n$ teži ka $x^*$ u smislu metrike $d^*$. Upravo smo dokazali da je $(X^*, d^*)$ kompletan metrički prostor. □

## 1.6 Kompaktnost

Dobro je poznato da svaki ograničen niz u skupu $\mathbb{R}$ sadrži konvergentan podniz. Drugim rečima, ako niz $(x_n)_n$ pripada segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tada postoji podniz $(x_{n_k})_k$ ovog niza, tako da je $\lim_{k\to\infty} = c \in [a, b]$. Segment $[a, b]$ na taj način postaje veoma važan podskup realne prave.

**Definicija 1.6.1.** Neka je $X$ metrički prostor. Skup $K \subset X$ je *kompaktan*, ako za svaki niz $(x_n)_n$ sa svojstvom $x_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$, važi da postoji podniz $(x_{n_k})_k$ i tačka $c \in K$, tako da je $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

**Teorema 1.6.1.** *Neka je $K \subset X$. Skup $K$ je kompaktan, ako i samo ako za svaki beskonačan podskup $M \subset K$ važi $(\operatorname{acc} M) \cap K \neq \emptyset$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $K$ kompaktan skup i neka je $M$ beskonačan podskup od $K$. Neka je $(x_n)_n$ proizvoljan niz različitih tačaka od $M$. Skup $K$ je kompaktan, te postoji tačka $c \in K$ i postoji podniz $(x_{n_k})_k$, tako da je $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Očigledno, $c \in \operatorname{acc} M$.

Sada pretpostavimo da za svaki beskonačan skup $M \subset K$ važi $(\operatorname{acc} M) \cap K \neq \emptyset$. Neka je $(x_n)_n$ proizvoljan niz u $K$. Posmatrajmo skup $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ako je skup $M$ konačan, onda sigurno postoji konvergentan podniz niza $(x_n)_n$. Dakle, pretpostavimo da je $M$ beskonačan podskup od $K$. Stoga postoji $c \in K \cap (\operatorname{acc} M)$. Lako je dokazati da postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira ka $c$. □

**Definicija 1.6.2.** Skup $K$ je relativno kompaktan, ako je $\operatorname{cl} K$ kompaktan u $X$.

**Teorema 1.6.2.** *Skup $K$ je relativno kompaktan, ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ iz skupa $K$ postoji podniz $(x_{n_k})_k$ ovog niza, i postoji tačka $c \in X$, tako da je $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.*

Važno je primetiti razliku između kompaktnih i relativno kompaktnih skupova: kod kompaktnih skupova karakteristična tačka $c$ pripada skupu $K$, dok kod relativno kompaktnih skupova to nije obavezno.

Na primer, otvoreni interval $(a,b)$ je relativno kompaktan u $\mathbb{R}$, i nije kompaktan u $\mathbb{R}$. Sa druge strane, segment $[a,b]$ je kompaktan podskup u $\mathbb{R}$.

Očigledno, skup $\mathbb{R}$ nije kompaktan. Međutim, ako se posmatra proširena realna prava $\mathbb{R}^* = [-\infty,+\infty] = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, tada je skup $\mathbb{R}^*$ kompaktan. Pri tome se posmatra uobičajena konvergencija niza realnih brojeva ka $+\infty$, ili $-\infty$. Neka je $(x_n)_n$ proizvoljan niz u $\mathbb{R}$. Ako je ovaj niz ograničen u skupu $\mathbb{R}$, tada postoji konvergentan podniz ovog niza, čija granična vrednost pripada skupu $\mathbb{R}$. Ako niz $(x_n)_n$ nije odozgo ograničen, tada postoji njegov podniz koji konvergira ka $+\infty$, dakle konvergira u $\mathbb{R}^*$. Ako niz $(x_n)_n$ nije odozdo ograničen, tada postoji neki njegov podniz koji konvergira ka $-\infty$, dakle u $\mathbb{R}^*$. Proizilazi da proizvoljan niz $(x_n)_n$ u skupu $\mathbb{R}$ sadrži podniz koji konvegira u $\mathbb{R}^*$. Sada nije teško proveriti da svaki niz $(x_n)_n$ u $\mathbb{R}^*$ sadrži konvergentan podniz. Time smo dokazali da je $\mathbb{R}^*$ kompaktan. Stoga se skup $\mathbb{R}^*$ naziva *kompaktifikacija* skupa $\mathbb{R}$.

**Teorema 1.6.3.** *Svaki kompaktan metrički prostor jeste kompletan. Specijalno, svaki kompaktan podskup proizvoljnog metričkog prostora jeste zatvoren.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $X$ kompaktan metrički prostor, i neka je $(x_n)_n$ proizvoljan Košijev niz u $X$. Sledi da postoji tačka $c \in X$ i podniz $(x_{n_k})_k$, tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Prema Teoremi 1.4.3, niz $(x_n)_n$ je konvergentan i njegova granična vrednost je $c$.

Neka je $K$ kompaktan podskup od $X$. Tada je $K$ posmatran sam za sebe kompletan metrički prostor. Sledi da je $K$ zatvoren u $X$. $\square$

Skup $\mathbb{R}$ je kompletan metrički prostor, ali nije kompaktan. Dakle, ne važi obrat prethodnog tvrđenja.

**Teorema 1.6.4.** *Neka je $X$ metrički prostor, $K$ kompaktan podskup od $X$ i $H$ zatvoren podskup od $K$. Tada je $H$ kompaktan skup.*

*Dokaz.* Neka je $K$ kompaktan skup, $H \subset K$ i neka je $H$ zatvoren. Pretpostavimo da je $(x_n)_n$ proizvoljan niz u skupu $H$. Na osnovu kompaktnosti skupa $K$ sledi da postoji tačka $c \in K$ i postoji podniz $(x_{n_k})_k$, tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Skup $H$ je zatvoren, pa mora biti $c \in H$. Time je dokazana kompaktnost skupa $H$. $\square$

**Posledica 1.6.1.** *Ako je $K$ kompaktan skup u metričkom prostoru $X$, tada je svaki podskup od $K$ relativno kompaktan.*

**Definicija 1.6.3.** Neka je $X$ metrički prostor, $\epsilon > 0$, i neka je $M_\epsilon, K \subset X$. Skup $M_\epsilon$ je $\epsilon$-mreža skupa $K$, ako je

$$K \subset \bigcup_{x \in M_\epsilon} K(x, \epsilon).$$

**Definicija 1.6.4.** Skup $K$ je *totalno ograničen*, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji konačna $\epsilon$-mreža skupa $K$. Drugim rečima, skup $K$ je totalno ograničen ako i samo ako je skup $M_\epsilon$ (u prethodnoj definiciji) konačan za svako $\epsilon > 0$.

**Teorema 1.6.5.** *Svaki totalno ograničen skup jeste ograničen.*

*Dokaz.* Neka je $K$ totalno ograničen skup i neka je $\epsilon > 0$. Postoji konačan skup $M_\epsilon \subset X$, tako da je $K \subset \bigcup\limits_{x \in M_\epsilon} K(x, \epsilon)$. Tada je $d(M_\epsilon) < \infty$ i

$$d(K) \leq d(M_\epsilon) + 2\epsilon < \infty.$$

Time je dokazano da je skup $K$ ograničen. $\square$

**Posledica 1.6.2.** *Neka je $X$ metrički prostor, i $H, K \subset X$. Ako je $H \subset K$ i $K$ je totalno ograničen, tada je $H$ takođe totalno ograničen.*

**Primer 1.6.1.** Neka je $X = \ell_p$ i $p \geq 1$. Tada postoji ograničen podskup prostora $\ell_p$, koji nije totalno ograničen.

*Dokaz.* Posmatrajmo niz tačaka u $\ell_p$:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

Ako je $0 = (0, 0, \ldots)$, tada je $d_p(e_n, 0) = 1$, odnosno $e_n \in K[0, 1]$ za svako $n$. Sledi da je skup $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen, i dijametar ovog skupa je najviše 2.

Sa druge strane, neka je $0 < \epsilon < 1$. Ako je $n \neq k$, tada je $d_p(e_n, e_k) = 2^{1/p} > 1$, te ne postoji jedna kugla $K(x, \epsilon)$, koja bi sadržala istovremeno dve tačke $e_n$ i $e_k$. Sledi da skup $E$ nema konačnu $\epsilon$-mrežu ako je $0 < \epsilon < 1$. Prema tome, skup $E$ nije totalno ograničen. $\square$

**Teorema 1.6.6.** *Neka je $X$ metrički prostor i $K \subset X$. Ako je skup $K$ relativno kompaktan, onda je skup $K$ totalno ograničen.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da $K$ nije totalno ograničen. Postoji $\epsilon > 0$, tako da ne postoji konačna $\epsilon$-mreža skupa $K$ u prostoru $X$. Neka je $x_1 \in K$. Postoji tačka $x_2 \in K$, tako da je $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$. Ako poslednje tvrđenje ne bi važilo, onda bi skup $\{x_1\}$ bio jedna $\epsilon$-mreža skupa $K$, što je nemoguće.

Postoji tačka $x_3 \in K$, tako da je $d(x_1, x_3) \geq \epsilon$ i $d(x_2, x_3) \geq \epsilon$. U suprotnom skup $\{x_1, x_2\}$ bi predstavljao jednu $\epsilon$-mrežu skupa $K$, što je nemoguće.

Nastavljajući postupak, dolazimo do beskonačnog niza $(x_n)_n$ tačaka skupa $K$ sa svojstvom $d(x_n, x_k) \geq \epsilon$ za svako $n \neq k$. Iz ovog niza se, očigledno, ne može izdvojiti ni jedan konvergentan podniz. Sledi da skup $K$ nije relativno kompaktan. □

**Posledica 1.6.3.** *Ako je $K$ relativno kompaktan skup u metričkom prostoru $X$, tada je $K$ ograničen skup u $X$. Specijalno, ako je $K$ kompaktan skup, tada je $K$ zatvoren i ograničen podskup od $X$.*

U proizvoljnom (pa i kompletnom) metričkom prostoru nije tačno da zatvoren i ograničen skup mora biti kompaktan, što pokazuje sledeći primer.

**Primer 1.6.2.** Prostor $\ell_p$ je kompletan, ali zatvorena jedinična kugla $K = K[0, 1]$ nije relativno kompaktan (ni kompaktan) skup.

*Dokaz.* Ako bi kugla $K[0, 1] = \{(x_n)_n : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq 1\}$ bio relativno kompaktan skup, onda bi i njegov podskup $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bio relativno kompaktan. Međutim, prema Primeru 1.6.1 to nije tačno. □

**Teorema 1.6.7.** *Neka je $X$ kompletan metrički prostor i $K \subset X$. Skup $K$ je relativno kompaktan ako i samo ako je $K$ totalno ograničen.*

*Dokaz.* Neka je $X$ kompletan metrički prostor, i neka je $K$ totalno ograničen podskup u $X$. Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $K$ beskonačan skup (inače, svaki konačan skup je relativno kompaktan, i tvrđenje je dokazano).

Neka je $(x_n)_n$ proizvoljan niz u $K$. Za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji konačna $\frac{1}{k}$ -mreža skupa $K$. Neka je, dakle, skup $\{y_1^k, y_2^k, \ldots, y_{m_k}^k\}$ jedna $\frac{1}{k}$ -mreža skupa $K$, pri čemu ta mreža postoji za svako $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $k = 1$. Skup $\{y_1^1, y_2^1, \ldots, y_{m_1}^1\}$ je jedna 1-mreža skupa $K$, odnosno

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} K(y_j^1, 1).$$

Bar jedna od ovih kugli sadrži beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$. Neka je to podniz

$$(x_n^1)_n = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots).$$

Neka je $k = 2$. Postoji konačna $\frac{1}{2}$ -mreža skupa $K$, odnosno postoji skup $\{y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{m_2}^2\}$ u $X$, tako da je

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m_2} K\left(y_j^2, \frac{1}{2}\right).$$

Bar jedna kugla sadrži beskonačno mnogo članova niza $(x_n^1)_n$. Neka je to podniz

$$(x_n^2)_n = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots).$$

Nastavljajući postupak, dolazimo do familije nizova $\big((x_n^k)_n\big)_k$:

$$\begin{array}{rcl}
(x_n^1)_n &=& (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots) \\
(x_n^2)_n &=& (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots) \\
(x_n^3)_n &=& (x_1^3, x_2^3, x_3^3 \ldots) \\
&\vdots&
\end{array}$$

sa svojstvom da je niz u jednoj horizontali uvek podniz niza u prethodnoj horizontali, a za članove niza u jednoj horizontali uvek važi $d(x_n^k, x_m^k) < \frac{2}{k}$ za svako $n, m \in \mathbb{N}$. Posmatramo dijagonalni niz

$$(x_1^1, x_2^2, x_3^3, \ldots) = (x_k^k)_k.$$

Ovaj niz je podniz polaznog niza $(x_n)_n$, i za $m > n$ ispunjava uslov

$$d(x_m^m, x_n^n) < \frac{2}{n}.$$

Time je dokazano da je $(x_k^k)_k$ Košijev niz u metričkom prostoru $X$. Prostor $X$ je kompletan, te je prethodni niz konvergentan u $X$. Sledi da je $K$ relativno kompaktan podskup od $X$.

U Teoremi 1.6.6 je dokazana suprotna implikacija. □

**Teorema 1.6.8.** *Neka je $X$ metrički prostor. $X$ je kompaktan ako i samo ako je $X$ kompletan i totalno ograničen.*

*Dokaz.* Neka je $X$ kompletan i totalno ograničen. Prema prethodnoj teoremi, $X$ je relativno kompaktan. Za ceo prostor $X$ osobina kompaktnosti je ekvivalenta osobini relativne kompaktnosti. Dakle, $X$ je kompaktan prostor.

Obrnuto tvrđenje je dokazano ranije. □

## 1.7 Separabilni prostori

**Definicija 1.7.1.** Metrički prostor $X$ je *separabilan*, ako postoji najviše prebrojiv podskup $M$ od $X$, tako da je $\mathrm{cl}\, M = X$.

Skup $\mathbb{R}$ je separabilan, jer je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv i gust u skupu $\mathbb{R}$. Skup $\mathbb{R}^k$ je takođe separabilan, jer je skup $\mathbb{Q}^k$ prebrojiv i gust u skupu $\mathbb{R}^k$.

**Primer 1.7.1.** Prostori $c_0$, $c$ i $\ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ su separabilni.

*Dokaz.* Dokazaćemo separabilnost prostora $\ell_p$. Neka je $x = (x_k)_k \in \ell_p$ i $\epsilon > 0$. Na osnovu konvergencije reda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ sledi da postoji $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p/2$. Za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji racionalan broj $r_k$ sa svojstvom $|x_k - r_k| < \frac{\epsilon}{(2n)^{1/p}}$. Neka je $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots)$. Očigledno je $r \in \ell_p$. Tada je

$$[d_p(r,x)]^p = \sum_{k=1}^{n} |r_k - x_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2n} n + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p.$$

Neka je

$$M = \{y = (y_k)_k \in \ell_p : y_k \in \mathbb{Q},\ \text{i postoji } n \in \mathbb{N} \text{ tako da je } y_k = 0 \text{ za svako } k \geq n\}.$$

Tada je $M \subset \ell_p$. Dakle, za svako $\epsilon > 0$ i za svako $x \in \ell_p$ postoji $r \in M$, tako da je $d_p(x, r) < \epsilon$. Sledi da je $\operatorname{cl} M = \ell_p$. Skup $M$ je očigledno prebrojiv, te je prostor $\ell_p$ separabilan.

Prema konstrukciji, $M \subset \ell_p \subset c_0 \subset c$. Nije teško dokazati da je $M$ gust u prostorima $c_0$ i $c$ u smislu $d_\infty$ metrike. □

**Primer 1.7.2.** Prostor $\ell_\infty$ nije separabilan.

*Dokaz.* Neka je $L$ skup svih nizova $x = (x_k)_k$, sa svojstvom $x_k = 0$ ili $x_k = 1$. Očigledno, $x \in \ell_\infty$. Kardinalni broj skupa $L$ je $2^{\aleph_0} = c$, odnosno skup $L$ je neprebrojiv. Ako je $x, y \in L$ i $x \neq y$, tada je $d_\infty(x, y) = 1$. Dakle $K\left(x, \frac{1}{3}\right) \cap K\left(y, \frac{1}{3}\right) \cap L = \emptyset$. Neka je $S$ proizvoljan skup koji je gust u $\ell_\infty$. Tada ovaj skup u svakoj kugli $K\left(x, \frac{1}{3}\right)$ $(x \in L)$ mora imati bar jednu tačku. Skup $L$ je neprebrojiv, odakle sledi da je skup $S$ neprebrojiv. Prema tome, $\ell_\infty$ nije separabilan. □

Dokazaćemo korisno tvrđenje. U dokazu se koriste osobine neprekidnih funkcija na segmentu, koje se mogu naći u klasičnom udžbeniku matematičke analize ([**?**], [3]), ili u narednoj glavi u opštijem obliku.

**Teorema 1.7.1.** *Neka je $(u_n)_n$ niz u $C[-1, 1]$, tako da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $u_n(t) \geq 0$ *za svako* $t \in [-1, 1]$ *i svako* $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\int\limits_{-1}^{1} u_n(t)dt = 1$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left( \int\limits_{-1}^{-\delta} u_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{1} u_n(t)dt \right) = 0$ *za svako* $\delta \in (0, 1)$.

*Tada za svako $f \in C[-1/2, 1/2]$ sa svojstvom $f(-1/2) = f(1/2) = 0$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformno na $[-1/2, 1/2]$, pri čemu je*

$$f_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x - y)f(y)dy, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right].$$

*Dokaz.* Funkcija $f$ je ravnomerno neprekidna na $[-1/2, 1/2]$ (videti Teoremu 2.1.4, ili [**?**], [3]). Neka je $\epsilon > 0$. Sledi da postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x, y \in [-1/2, 1/2]$ sa svojstvom $|x - y| < \delta$, važi

$|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Za upravo dobijeni broj $\delta$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$ važi

$$\int_{-1}^{-\delta} u_n(t)dt + \int_{\delta}^{1} u_n(t)dt < \epsilon.$$

Funkcija $f$ je ograničena na segmentu $[-1/2, 1/2]$ (videti Posledicu 2.1.6, ili [?], [3]), te postoji broj $M$, tako da je $|f(x)| \leq M$ za svako $x \in [-1/2, 1/2]$. Bez gubljenja opštosti možemo uzeti da je $M \geq 1$. Sada važi

$$\left| f(x) - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)f(x)dy \right| = |f(x)| \left| 1 - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy \right| = A.$$

Sada razlikujemo dva slučaja.

*Slučaj 1.* Pretpostavimo da je rastojanje tačke $x$ od bar jedne tačke $\pm 1/2$ manje od $\delta$. Tada je $|f(x)| = |f(x) - f(\pm 1/2)| < \epsilon$. Na osnovu osobina funkcija $u_n$ sledi da za svako $x \in [-1/2, 1/2]$ važi

$$\int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy = \int_{x-1/2}^{x+1/2} u_n(t)dt \leq \int_{-1}^{1} u_n(y)dy = 1.$$

Prema tome,

$$\left| 1 - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy \right| \leq 1 \leq M.$$

Sledi $A \leq M\epsilon$.

*Slučaj 2.* Pretpostavimo da je $|x + 1/2| \geq \delta$ i $|x - 1/2| \geq \delta$. Primetimo da je

$$\int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy = \int_{x-1/2}^{x+1/2} u_n(t)dt.$$

Takođe je

$$
\begin{aligned}
1-\int\limits_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy &= \int\limits_{-1}^{x-1/2} u_n(t)dt+\int\limits_{x-1/2}^{x+1/2} u_n(t)dt+\int\limits_{x+1/2}^{1} u_n(t)dt \\
&\quad -\int\limits_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy \\
&\leq \int\limits_{-1}^{-\delta} u_n(t)dt+\int\limits_{\delta}^{1} u_n(t)dt<\epsilon.
\end{aligned}
$$

Kako je $|f(x)| \leq M$, sledi da je $A \leq M\epsilon$.

Dakle, u oba prethodna slučaja važi $A \leq M\epsilon$. Na kraju, proizilazi sledeća procena

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) - f(x)| \leq \\
&\leq \left| \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)f(y)dy - \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)f(x)dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)f(x)dx - f(x) \right| \\
&\leq \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)|f(y)-f(x)|dy + M\epsilon \\
&\leq \int_{|y|\leq 1, |x-y|\leq\delta} u_n(x-y)|f(y)-f(x)|dy \\
&\quad + \int_{|y|\leq 1/2, |x-y|>\delta} u_n(x-y)|f(y)-f(x)|dy + M\epsilon \\
&\leq \epsilon \int_{-1/2}^{1/2} u_n(x-y)dy + \int_{|y|\leq 1/2, |x-y|>\delta} u_n(x-y)(|f(y)|+|f(x)|)dy + M\epsilon \\
&\leq \epsilon + 2M \int_{|y|\leq 1/2, |x-y|>\delta} u_n(x-y)dy + M\epsilon \\
&= \epsilon + 2M\epsilon + M\epsilon = (1+3M)\epsilon.
\end{aligned}$$

Time je dokazano tvrđenje. □

Sada navodimo nekoliko osobina gama funkcije. Ako je $x > 0$, tada je $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ gama funkcija (po $x$). Za $x > 1$ važi formula $\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$, odakle za $n \in \mathbb{N}$ sledi $\Gamma(n) = (n-1)!$. Takođe je $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Sa druge strane, važi sledeća varijanta Stirlingove[9]

[9]James Stirling (1692-1770), škotski matematičar

formule

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x > 0. \tag{1.1}$$

Sledeći rezultat o prostoru $C[a,b]$ je fundamentalan.

**Teorema 1.7.2.** (Vajerštras[10]) *Za svaku funkciju $f \in C[a,b]$ postoji niz polinoma $(p_n)_n$, koji uniformno konvergira ka $f$ na segmetnu $[a,b]$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo, bez gubljenja opštosti, da je $f \in C[-1/2, 1/2]$.

*Slučaj 1.* Neka je, na početku, $f(-1/2) = f(1/2) = 0$. Na osnovu parcijalne integracije, osobina gama funkcije i Stirlingove formule (1.1), proizilazi da važi

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(x+1)^{n+1} dx \\ &= \frac{n!}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Posmatrajmo niz funkcija

$$u_n(x) = \frac{1}{I_n}(1-x^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\delta \in (0,1)$. Tada, ako je $\delta \leq |x| \leq 1$, onda je $0 \leq 1 - x^2 \leq 1 - \delta^2 < 1$. Sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(1-x^2)^n = 0$ uniformno po $x \in [\delta, 1]$, kao i uniformno po $x \in [-1, -\delta]$. Odatle sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\delta}^{1} u_n(x)dx = 0$, kao i $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\delta} u_n(x)dx = 0$. Dakle, niz $(u_n)_n$ ispunjava uslove Teoreme 1.7.1. Sada dokaz teoreme Vajerštrasa sledi na osnovu Teoreme 1.7.1.

*Slučaj 2.* Pretpostavimo da je $f \in C[-1/2, 1/2]$ proizvoljna funkcija. Tada funkcija $F(x) = f(x) - f(-1/2) + [f(1/2) - f(-1/2)](x + 1/2)$ ispunjava sve uslove *Slučaja 1.* Dakle, funkcija $F$ je uniformna granična vrednost nekog niza polinoma na $[-1/2, 1/2]$, odakle sledi teorema Vajerštrasa za funkciju $f$. $\square$

[10]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), nemački matematičar

**Primer 1.7.3.** Prostor $C[a,b]$ je separabilan.

*Dokaz.* Uniformna konvergencija u prostoru $C[a,b]$ je upravo konvergencija po metrici $d_\infty$ u tom prostoru. Dakle, ako je $P$ skup svih polinoma sa domenom $[a,b]$, tada je, na osnovu Vajerštrasove teoreme, $\operatorname{cl} P = C[a,b]$. Skup $P$ nije prebrojiv, ali skup $P_1$ svih polinoma sa racionalnim koeficijentima jeste prebrojiv. Nije teško proveriti da je $\operatorname{cl} P_1 = C[a,b]$. □

**Definicija 1.7.2.** Familija otvorenih skupova $(B_i)_{i\in I}$ u metričkom prostoru $X$ je *baza* (preciznije, baza familije svih otvorenih skupova) tog prostora, ako svaki neprazan otvoren podskup od $X$ jeste unija nekih skupova iz familije $(B_i)_{i\in I}$.

Skup $X$ je *najviše prebrojive baze*, ako u njemu postoji baza sa najviše prebrojivo mnogo elemenata.

Familija svih intervala sa racionalnim krajevima čini bazu u $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{R}$ ima prebrojivu bazu. Slično, prostori $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{C}^k$ imaju prebrojive baze.

**Teorema 1.7.3.** *Metrički prostor $X$ je najviše prebrojive baze, ako i samo ako je $X$ separabilan.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $(B_i)_{i=1,2,\dots}$ jedna najviše prebrojiva baza prostora $X$. Neka je skup $M$ sastavljen od po jedne tačke svakog skupa $G_i$. Tada je $M$ najviše prebrojiv. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka i neka je $U(x)$ proizvoljna otvorena okolina tačke $x$. Tada je $U(x)$ unija nekih elemenata baze. Sledi da ova okolina sadrži elemente skupa $M$, te je $\operatorname{cl} M = X$. Prema tome, $X$ je separabilan prostor.

Obrnuto, neka je $X$ separabilan prostor, i neka je $\{x_n : n = 1,2,\dots\}$ najviše prebrojiv skup tačaka koji je gust u $X$. Posmatramo familiju otovorenih kugli $K\left(x_n, \frac{1}{m}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$. Ova familija je prebrojiva. Neka je $G$ proizvoljan otvoren skup u $X$ i neka je $y \in G$. Postoji $m(y) \in \mathbb{N}$ tako da je $K\left(y, \frac{1}{m(y)}\right) \subset G$. Skup $\{x_n : n = 1,2,\dots\}$ je gust u $X$, te postoji $n(y)$ sa svojstvom $d(x_{n(y)}, y) < \frac{1}{3m(y)}$. Tada $y \in K\left(x_{n(y)}, \frac{1}{2m(y)}\right) \subset K\left(y, \frac{1}{m(y)}\right) \subset G$, odnosno

$$G = \bigcup_{y\in G} K\left(x_{n(y)}, \frac{1}{2m(y)}\right).$$

Na kraju, sledi da je familija $(K(x_n, 1/m))_{n,m}$ prebrojiva baza prostora $X$. $\square$

Neka je $K \subset X$. Familija skupova $(G_i)_{i\in I}$ je *pokrivanje* skupa $K$, ako je $K \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Pri tome je $I$ proizvoljan indeksni skup. Pokrivanje skupa $K$ je *otvoreno*, ako su svi skupovi $G_i$ otvoreni.

**Teorema 1.7.4.** (Lindelef[11]) *Neka je $(G_i)_{i\in I}$ beskonačno otvoreno pokrivanje separabilnog metričkog prostora $X$. Tada se iz $(G_i)_{i\in I}$ može izdvojiti prebrojivo pokrivanje prostora $X$.*

*Dokaz.* Neka je $(B_n)_{n=1,2,\dots}$ najviše prebrojiva baza prostora $X$ i neka je $(G_i)_{i\in I}$ proizvoljno otvoreno pokrivanje prostora $X$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $i(x) \in I$, tako da je $x \in G_{i(x)}$. Skup $G_{i(x)}$ je otvoren, pa postoji $k(x) \in \mathbb{N}$, tako da je $x \in B_{k(x)} \subset G_{i(x)} \subset X$. Neka je $I(x) \subset I$, tako da $i \in I(x)$ ako i samo ako $B_{k(x)} \subset G_i$. Različitih skupova $I(x)$ može biti najviše prebrojivo mnogo, jer skupova $B_n$ ima najviše prebrojivo mnogo. Iz skupa $I(x)$ izbacimo sve članove, osim jednog, proizvoljno odabranog. Sada je

$$G = \bigcup_{x\in G}\{x\} \subset \bigcup_{x\in G} B_{k(x)} \subset \bigcup_{x\in G}\bigcup_{i\in I(x)} G_i \subset \bigcup_{i\in I} G_i = X.$$

Međutim, unija $\bigcup_{x\in G}\bigcup_{i\in I(x)} G_i$ je najviše prebrojiva (svaki skup $I(x)$ je jednoelementan, a različitih skupova $I(x)$ ima najviše prebrojivo mnogo). Prema tome, proizvoljno otvoreno pokrivanje skupa $X$ svedeno je na najviše prebrojivo pokrivanje. $\square$

**Teorema 1.7.5.** *Svaki kompaktan metrički prostor jeste separabilan.*

*Dokaz.* Neka je $X$ kompaktan. To znači da je $X$ totalno ograničen, pa za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji konačna $\frac{1}{k}$-mreža skupa $X$. Neka je ta mreža skup $\{y_1^k, y_2^k, \dots, y_{n_k}^k\}$. Za svako $x \in X$ postoji $y_{i_k}^k$, tako da je $d(x, y_{i_k}^k) < \frac{1}{k}$. Dakle, skup $\{y_i^k : k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n_k\}$ je prebrojiv i gust u skupu $X$. Sledi da je $X$ separabilan. $\square$

**Teorema 1.7.6.** (Hajne[12]- Borel[13]) *Skup $K$ metričkog prostora $X$ je kompaktan, ako i samo ako se iz svakog otvorenog pokrivanja skupa $K$ može izdvojiti konačno pokrivanje skupa $K$.*

[11] Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946), finski matematičar

[12] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), nemački matematičar

[13] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), francuski matematičar

*Dokaz.* Pretpostavimo da se iz svakog otvorenog pokrivanja skupa $K$ može izdvojiti konačno pokrivanje skupa $K$. Ukoliko je $K$ konačan skup, odmah sledi da je $K$ kompaktan. Stoga pretpostavimo da je skup $K$ beskonačan.

Pretpostavimo da $K$ nije kompaktan skup. Neka je $M$ proizvoljan beskonačan podskup od $K$. Sledi da $M$ nema tačku nagomilavnja u $K$. Dakle, ni jedna tačka skupa $K$ nije tačka nagomilavanja skupa $M$. Ako je $x \in K$, onda postoji $\epsilon_x > 0$, tako da je $K(x, \epsilon_x) \cap M = \{x\}$. Sa druge strane,

$$K \subset \bigcup_{x \in K} K(x, \epsilon_x).$$

Prema pretpostavci, ovo pokrivanje se može svesti na konačno pokrivanje, odnosno

$$K \subset K(x_1, \epsilon_{x_1}) \cup \cdots \cup K(X_n, \epsilon_{x_n}).$$

Međutim, u svakoj kugli $K(x_i, \epsilon_{x_i})$ se nalazi samo jedna tačka skupa $M$, odakle sledi da je $M$ konačan skup. Prema polaznoj pretpostavci, $M$ je beskonačan, odakle sledi da postoji tačka nagomilavanja skupa $M$ u skupu $K$. Dakle, $K$ je kompaktan skup.

Sa druge strane, neka je $K$ kompaktan skup i neka je $(G_i)_{i \in I}$ proizvoljno otvoreno pokrivanje skupa $K$. Prema Teoremi 1.7.5 sledi da je $K$ separabilan, pa prema teoremi Lindelefa sledi da se proizvoljno pokrivanje može redukovati na prebrojivo pokrivanje skupa $KK$. Neka je, dakle, $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Pretpostavimo da se iz prebrojivog pokrivanja ne može izdvojiti konačno pokrivanje. To bi značilo da za svaki izbor $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ važi

$$H_n = K \setminus (G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_n}) \neq \emptyset.$$

Za svako $n \in N$ postoji $x_n \in H_n$. Prostor $X$ je kompaktan, pa postoji konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$. Neka je $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in X$. Postoji neko $j \in \mathbb{N}$ tako da $x \in G_j$. Postoji $k_0$ tako da za svako $k \geq k_0$ važi $x_{n_k} \in G_j$. Međutim, za beskonačno mnogo skupova $H_n$ $(\supset G_j^c)$ važi $x_n \in H_n$ i $x_n \notin G_j$. Prema tome, iz prebrojivog otvorenog pokrivanja skupa $X$ može se izdvojiti konačno pokrivanje skupa $X$. $\square$

# Glava 2

# Preslikavanja

## 2.1 Neprekidne funkcije

**Definicija 2.1.1.** Neka su $(X, d_X)$ i $(Y, d_Y)$ metrički prostori, $f : X \to Y$ neka je funkcija, $a \in X$ i $A \in Y$. Tačka $A$ je *granična vrednost* funkcije $f$ u tački $a$ na skupu $X$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in X$ važi implikacija

$$0 < d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), A) < \epsilon.$$

U tom slučaju je oznaka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

U skladu sa prethodnom definicijom, uvek je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a,\ x \neq a} f(x)$.

Jednostavno je dokazati da ako funkcija $f$ ima graničnu vrednost u tački $a$, onda je ta granična vrednost jedinstvena.

Prethodna definicija lako može biti modifikovana ako se ispituje granična vrednost funkcije $f$ u tači $a$ na nekom skupu $M \subset X$.

**Definicija 2.1.2.** Neka je $M \subset X$, $f : M \to Y$ i $a \in \operatorname{acc} M$. Tačka $A \in Y$ je granična vrednost funkcije $f$ u tački $a$ na skupu $M$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in M$ važi implikacija

$$0 < d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), A) < \epsilon.$$

Pri tome, nije obavezno $a \in M$.

**Definicija 2.1.3.** Neka su $X, Y$ metrički prostori, $M \subset X$, $x_0 \in M$ i $f : M \to Y$. Funkcija $f$ je *neprekidna* u tački $x_0$ po skupu $M$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in M$ važi implikacija:

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Ako postoji neko $r > 0$ tako da je $K(x_0, r) \subset M$, onda se izraz *po skupu* $M$ ne koristi, već se jednostavno kaže da je $f$ neprekidna u tački $x_0$.

**Posledica 2.1.1.** *Neka su $X$ i $Y$ metrički prostori, $f : X \to Y$ i $x_0 \in X$. Ako je $x_0$ izolovana tačka skupa $X$, tada je $f$ neprekidna u tački $x_0$. Ako je $x_0$ tačka nagomilavanja skupa $X$, tada je $f$ neprekidna u tački $x_0$, ako i samo ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

**Teorema 2.1.1.** *Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački $x_0 \in X$, ako i samo ako za svaku okolinu $V$ tačke $f(x_0)$ skup $f^{-1}(V)$ jeste okolina tačke $x_0$.*

*Dokaz.* Neka je $f$ neprekidna u tački $x_0$ i neka je $V$ okolina tačke $f(x_0)$. Postoji $\epsilon > 0$, tako da je $K(f(x_0), \epsilon) \subset V$. Takođe, postoji broj $\delta > 0$, tako da za svako $x \in X$ sa osobinom $d(x, x_0) < \delta$ sledi da je $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. To znači da je $K(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$, te je skup $f^{-1}(V)$ okolina tačke $x_0$.

Pretpostavimo sada da za svaku okolinu $V$ tačke $f(x_0)$ važi da je $f^{-1}(V)$ okolina tačke $x_0$. Neka je $V = K(f(x_0), \epsilon)$, gde je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Skup $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$ je okolina tačke $x_0$, te stoga postoji $\delta > 0$, tako da je $K(x_0, \delta) \subset f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$. To znači da ako je $x \in X$ i $d(x, x_0) < \delta$, onda je $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Time smo pokazali da je $f$ neprekidna u tački $x_0$. $\square$

**Definicija 2.1.4.** Funkcija $f : X \to Y$ je *neprekidna na skupu* $X$, ako je $f$ neprekidna u svakoj tački skupa $X$.

**Teorema 2.1.2.** *Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna na $X$ ako i samo ako za svaki otvoren podskup $V$ od $Y$ važi da je $f^{-1}(V)$ otvoren u $X$.*

*Dokaz.* Neka je $f$ neprekidna funkcija na skupu $X$ i neka je $V$ otvoren skup u $Y$. Ako je $f^{-1}(V)$ prazan skup, onda je on otvoren. Pretpostavimo da je $x_0 \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x_0) \in V$. Postoji $\epsilon > 0$, tako da je $K = K(f(x_0), \epsilon) \subset V$. Skup $K$ je okolina tačke $f(x_0)$, pa je onda $f^{-1}(K)$ okolina tačke $x_0$. Sledi da postoji $\delta > 0$, tako da je $K(x_0, \delta) \subset f^{-1}(K)$. Prema tome, skup $f^{-1}(V)$ sadrži okolinu svake svoje tačke, te je $f^{-1}(V)$ otvoren.

Pretpostavimo sada da je $f^{-1}(V)$ otvoren u $X$ za svaki otvoren skup $V$ u $Y$. Neka je $x_0 \in X$, $f(x_0) \in Y$ i neka je $\epsilon > 0$. Tada je $V = K(f(x_0), \epsilon)$ otvoren skup, te je i $f^{-1}(V)$ otvoren u $X$. Obzirom da je $x_0 \in f^{-1}(V)$, sledi da postoji $\delta > 0$ sa svojstvom $K(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Prema tome, za proizvoljno $\epsilon > 0$ našli smo $\delta > 0$, tako da ako je $x \in X$ i $d(x, x_0) < \delta$, onda je $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Time je dokazana neprekidnost funkcije $f$ u proizvoljnoj tački $x_0 \in X$, te je preslikavanje $f$ neprekidno na skupu $X$. $\square$

**Posledica 2.1.2.** *Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna ako i samo ako za svaki zatvoren skup $F$ u $Y$ važi da je $f^{-1}(F)$ zatvoren u $X$.*

**Definicija 2.1.5.** Metrički prostor $X$ *nije povezan*, ako je $X$ unija dva disjunktna neprazna otvorena skupa u $X$.

Dakle, prostor $X$ je *povezan*, ako $X$ nije unija dva disjunktna neprazna otvorena skupa u $X$.

Skup $M$ ($M \subset X$) je povezan, ako je $M$ povezan ukoliko se posmatra kao metrički prostor.

**Posledica 2.1.3.** *Skup $X$ je povezan ako i samo ako $X$ nije disjunkta unija nepraznih zatvorenih skupova u $X$.*

**Posledica 2.1.4.** *Prostor $X$ je povezan ako i samo ako su $X$ i $\emptyset$ jedini podskupovi od $X$ koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni.*

Svaki povezani podskup realne prave jeste interval (otvoren, zatvoren, ili zatvoren samo sa jedne strane).

**Teorema 2.1.3.** *Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija, i neka je $X$ povezan metrički prostor. Tada je $f(X)$ povezan skup u $Y$.*

*Dokaz.* Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija, i neka je $X$ povezan skup. Pretpostavimo da $f(X)$ nije povezan u $Y$. Tada postoje neprazni podskupovi $A$ i $B$ od $f(X)$, tako da je $f(X) = A \cup B$, i $A, B$ su istovremeno neprazni, otvoreni i zatvoreni podskupovi od $f(X)$. Tada su takođe $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ istovremeno otvoreni i zatvoreni podskupovi od $X$, sa svojstvom $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$. To je nemoguće, jer je $X$ povezan skup. $\square$

**Posledica 2.1.5.** *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje, pri čemu je $X$ povezan metrički prostor. Ako je $x, y \in X$, $f(x) = a$ i $f(y) = b$, tada za svako $c \in (a, b)$ postoji $z \in X$ sa svojstvom $f(z) = c$.*

**Definicija 2.1.6.** Neka su $X, Y$ metrički prostori, neka je $M \subset X$ i $f : M \to Y$. Funkcija $f$ je *ravnomerno* (*uniformno*) *neprekidna na skupu* $M$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x, y \in M$ važi implikacija

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Očigledno, svaka ravnomerno neprekidna funkcija na skupu jeste i neprekidna na tom skupu, dok obrnuto ne važi.

**Primer 2.1.1.** Neka je $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ za $x \in (0, 1)$. Tada je $f$ neprekidna na skupu $(0, 1)$, ali $f$ nije ravnomerno neprekidna na $(0, 1)$.

*Dokaz.* Neprekidnost funkcije $f$ na intervalu $(0, 1)$ je trivijalna. Posmatrajmo nizove $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ i $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Tada je, očigledno, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. Sa druge strane, $f(x_n) = 1$, dok je $f(y_n) = -1$. Prema tome, funkcija $f$ nije ravnomerno neprekidna na intervalu $(0, 1)$. □

**Teorema 2.1.4.** *Neka su $X$ i $Y$ metrički prostori, neka je $M$ kompaktan podskup od $X$, i neka je $f : M \to Y$ neprekidna funkcija. Tada je $f$ ravnomerno neprekidna na $M$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $f$ neprekidna na $M$, ali da $f$ nije ravnomerno neprekidna na $M$. Tada postoji $\epsilon > 0$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje tačke $x_n, y_n \in M$ sa svojstvima $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ i $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Na osnovu kompaktnosti skupa $M$ sledi da postoji tačka $c \in K$ i postoji podniz $(x_{n_k})_k$ niza $(x_n)_n$, tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Očigledno, mora biti $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c$. Međutim, na osnovu $d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon$ sledi da mora biti $d_Y(f(x_{n_k}), f(c)) \geq \epsilon/2$, ili $d_Y(f(y_{n_k}), f(c)) \geq \epsilon/2$, odakle sledi da $f$ nije neprekidna u tački $c$. □

**Teorema 2.1.5.** *Neka su $X, Y$ metrički prostori, neka je $K$ kompaktan podskup od $X$ i neka je $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je $f(K)$ kompaktan podskup od $Y$.*

*Dokaz.* Neka je $(G_i)_{i\in I}$ proizvoljno otvoreno pokrivanje skupa $f(K)$. Tada je $(f^{-1}(G_i))_{i\in I}$ jedno otvoreno pokrivanje skupa $K$. Skup $K$ je kompaktan, pa se prethodno pokrivanje može redukovati na konačno pokrivanje. Drugim rečima, $K \subset f^{-1}(G_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(G_n)$. Na osnovu činjenice $f(f^{-1}(G_i)) \subset G_i$ sledi $f(K) \subset G_1 \cup \cdots \cup G_n$. Prema tome, $f(K)$ je kompaktan. □

**Posledica 2.1.6.** *Neka je $K$ kompaktan podskup metričkog prostora $X$, i neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada $f$ dostiže na skupu $K$ minimum i maksimum.*

*Dokaz.* Skup $f(K)$ je kompaktan, i stoga postoje brojevi $a = \min f(K) \in f(K)$, $b = \max f(K) \in f(K)$. Prema tome, postoje tačke $x, y \in K$, tako da je $f(x) = a$ i $f(y) = b$. □

## 2.2 Teorema Arcela-Askolija

U ovoj sekciji posmatramo kompaktne podskupove skupa $C[a, b]$.

**Definicija 2.2.1.** Skup $K \subset C[a, b]$ je ravnomerno ograničen, ako postoji konstanta $M$ tako da za svako $f \in K$ i svako $x \in [a, b]$ važi $|f(x)| \leq M$.

**Definicija 2.2.2.** Skup $K \subset C[a, b]$ je ekvineprekidan, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0a$, tako da za svako $f \in K$ i sve $x_1, x_\in[a, b]$ važi implikacija

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Nije teško proveriti da je svaki konačan podskup od $C[a, b]$ istovremeno ravnomerno ograničen i ekvineprekidan.

Dokazujemo fundamentalnu teoremu o kompaktnosti u $C[a, b]$.

**Teorema 2.2.1.** *Neka je $\emptyset \neq K \subset C[a, b]$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) *$K$ je kompaktan skup;*

(b) *$K$ je zatvoren, ravnomerno ograničen i ekvineprekidan skup.*

*Dokaz.* (a) $\implies$ (b): Pretpostavimo da je $K$ kompaktan skup. Tada je $K$ zatvoren i totalno ograničen. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan broj. Postoji konačna $\epsilon$-mreža skupa $K$, i tu $\epsilon$-mrežu označimo sa $K_\epsilon = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Neka je $f \in K$. Tada postoji $g_i$, tako da je $d_\infty(f, g_i) < \epsilon$. Funkcije $g_l$ su neprekidne, pa su i ograničene. Dakle, postoji konstanta $N$ tako da za svako $l \in \{1, \ldots, k\}$ i svako $x \in [a, b]$ važi $|g_l(x)| \leq N$. Sledi da za svako $x \in [a, b]$ važi

$$|f(x)| = |f(x) - g_k(x)| + |g_k(x)| \leq \epsilon + N.$$

Dakle, ako je $M = \epsilon + N$, onda za svako $f \in K$ i svako $x \in K$ važi $|f(x)| \leq M$. Dokazali smo ravnomernu ograničenost skupa $K$.

Dokažimo ekvineprekidnost skupa $K$. Skup $\{g_1, \ldots, g_k\}$ je ekvineprekidan. Neka je $\epsilon > 0$ isto kao u prethodnom delu. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svako $l \in \{1, \ldots, k\}$ i sve $x_1, x_2 \in [a, b]$ važi implikacija

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |g_l(x_1) - g_l(x_2) < \epsilon.$$

Ako je, dakle, $|x_1 - x_2| < \delta$, onda je

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - g_i(x_1)| + |g_i(x_1) - g_i(x_2)| + |g_i(x_2) - f(x_2)| \\ &\leq |g_i(x_1) - g_i(x_2)| + 2d_\infty(f, g_i) < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Prethodna procena ne zavisi od izbora funkcije $f \in K$, odakle sledi da je $K$ ekvineprekidan skup.

(b) $\implies$ (a): Dokazaćemo da je $K$ totalno ograničen skup. Na osnovu ravnomerne ograničenosti skupa $K$ sledi da postoji konstanta $M$ tako da za svako $f \in K$ i svako $x \in [a, b]$ važi $-M \leq f(x) \leq M$. Neka su $m$ i $n$ prirodni brojevi. Posmatramo podelu segmenta $[a, b]$ na podsegmente dužine $(b-a)/m$, i posmatramo podelu segmenta $[-M, M]$ na podsegmente dužine $M/n$. Drugim rečima,

$$\xi_r = a + \frac{r}{m}(b - a),\ r = 0, 1, \ldots, m, \quad \eta_s = \frac{sM}{n},\ s = 0, \pm 1, \ldots, \pm n.$$

Neka je $S_{mn}$ podskup od $C[a, b]$, tako da za svako $g \in S_{mn}$ važi:

$$g(\xi_0), g(\xi_1), \ldots, g(\xi_m) \in \{\eta_{-n}, \eta_{-n+1}, \cdots, \eta_n\},$$

i tako da je svaka funkcija $g$ linearna na segmentu $[\xi_{i-1}, \xi_i]$. Postoji tačno $(m+1)(2n+1)$ tačaka oblika $(\xi_i, \eta_j)$, odakle sledi da je skup $S_{mn}$ konačan.

Neka je $\epsilon > 0$. Postoji $\delta > 0$ tako da za svako $f \in K$ i sve $x_1, x_2 \in [a,b]$ važi implikacija

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Odaberimo prirodne brojeve $m, n$ sa svojstvima: $(b-a)/m < \delta$ i $2M/n < \epsilon$. Ako je $f \in K$ proizvoljan, onda očigledno postoji funkcija $g \in S_{mn}$ tako da je

$$|f(\xi_i) - g(\xi_i)| < \epsilon, \ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Neka je $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Kako je $\xi_{i+1} - \xi_i < \delta$, sledi da je

$$|g(\xi_i) - g(x_{i+1})| = |g(\xi_i) - f(\xi_i)| + |f(\xi_i) - f(\xi_{i+1})| \ + |f(\xi_{i+1}) - g(\xi_{i+1})| \\ \leq 3\epsilon.$$

Osim toga, funkcija $g$ je linearna na $[\xi_i, x_{i+1}]$, odakle sledi da je

$$|g(x) - g(x_i)| \leq 3\epsilon$$

za svako $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ i svako $x \in [\xi_i, x_{i+1}]$.

Na kraju, neka je $x \in [a,b]$ proizvoljno. Postoji $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ tako da je $x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$. Tada je

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(\xi_i)| + |f(\xi_i) - g(\xi_i)| + |g(\xi_i) - g(x)| < 5\epsilon.$$

Sledi da je $d_\infty(f, g) \leq 5\epsilon$. Dakle, skup $S_{mn}$ je konačna $5\epsilon$-mreža skupa $K$, odakle sledi da je $K$ totalno ograničen skup.

Prostor $C[a,b]$ je kompletan, te je $K$ relativno kompaktan. Skupa $K$ je zatvoren, pa je $K$ komapktan. □

**Posledica 2.2.1.** (Teorema Arcela-Askolija) *Podskup $K$ metričkog prostora $C[a,b]$ je relativno kompaktan, ako i samo ako je $K$ ravnomerno ograničen i ekvineprekidan.*

## 2.3 Monotone funkcije

U ovoj sekciji razmatramo realne funkcije čiji domen jeste podskup realne prave. Neka je, dakle, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ i $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in (a,b)$.

Leva granična vrednost funkcije $f$ u tački $x_0$, ukoliko postoji, jeste granična vrednost funkcije $f$ u tački $x_0$ na skupu $(x_0 - \epsilon, x_0)$, ako je $\epsilon > 0$. Dakle,

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x).$$

Analogno, desna granična vrednost funkcije $f$ u tački $x_0$, ukoliko postoji, jeste granična vrednost funkcije $f$ u tački $x_0$ na skupu $(x_0, x_0 + \epsilon)$, ako je $\epsilon > 0$. Prema tome,

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x).$$

Ako bar jedna od graničnih vrednosti $f(x_0-)$ i $f(x_0+)$ ne postoji u skupu $\mathbb{R}$, onda funkcija $f$ ima *prekid druge vrste u tački* $x_0$. Ako obe granične vrednosti $f(x_0-)$ i $f(x_0+)$ postoje u skupu $\mathbb{R}$, i pri tome bar jedna od tih graničnih vrednosti nije jednaka broju $f(x_0)$, onda $f$ ima *prekid prve vrste u tački* $x_0$.

Funkcija $f$ monotono raste na intervalu $(a, b)$ ako za svako $x, y \in (a, b)$ važi implikacija

$$x < y \implies f(x) \leq f(y).$$

Funkcija $f$ strogo monotono raste na ovom intervalu, ako u prethodnoj implikaciji uvek važi "$f(x) < f(y)$".

Analogno se definiše pojam monotono opadajuće i strogo monotono opadajuće funkcije na intervalu. Takođe, jednostavno je proširiti svojstvo monotonosti na zatvorene segmente ili poluzatvorene intervale, umesto otvorenih intervala. U ovim definicijama važno je zadržati svojstvo povezanosti domena funkcije $f$.

Ako $f$ monotono raste na nekom intervalu, onda $-f$ monotono opada na istom intervalu. Stoga je dovoljno ispitivati monotono rastuće funkcije, a onda nije teško formulisati odgovarajuća svojstva monotono opadajućih funkcija.

**Teorema 2.3.1.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotono rastuća funkcija. Tada za svako $x \in [a, b)$ postoji $f(x+)$, i za svako $x \in (a, b]$ postoji $f(x-)$.*

*Dokaz.* Neka je $x \in (a, b]$. Posmatrajmo skup $A = \{f(y) : a \leq y < x\}$. Iz činjenice da je $f$ montono rastuća funkcija, sledi da je skup $A$

odozgo ograničen brojem $f(x)$. Neka je $\alpha = \sup A$. Tada je $\alpha \leq f(x)$. Dokazaćemo da je $\alpha = f(x-)$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ sa svojstvom $\alpha - \epsilon < f(x-\delta) \leq \alpha$. Ako je $x - \delta \leq y < x$, tada je

$$\alpha - \epsilon < f(x-\delta) \leq f(y) \leq \alpha.$$

Drugim rečima, za svako $y \in [x-\delta, x)$ važi $|f(y)-\alpha| < \epsilon$. Prema tome, $f(x-) = \alpha$ i $f(x-) \leq f(x)$.

Ako je $x \in [a,b)$, onda se na sličan način dokazuje da postoji $f(x+) \geq f(x)$. □

Nije teško proveriti da prethodna teorema važi i u slučaju kada je domen funkcije $f$ otvoreni interval $(a,b)$.

**Teorema 2.3.2.** *Neka je $f$ monotona funkcija na segmentu $[a,b]$. Tada $f$ može imati samo prekide prve vrste, i to njih najviše prebrojivo mnogo.*

*Dokaz.* Neka je $f$, bez gubljenja opštosti, monotono rastuća funkcija. Prema prethodnoj teoremi, funkcija $f$ može imati samo prekide prve vrste. Neka je $x$ jedna takva tačka. Na osnovu monotonosti funkcije $f$ važi $f(x-) < f(x+)$. Postoji jedan racionalan broj $r(x)$, tako da je $f(x-) < r(x) < f(x+)$. Neka je $y$ neka druga tačka prekida funkcije $f$, recimo $y < x$. Njoj dodelimo racionalan broj $r(y)$ sa svojstvom $f(y-) < r(y) < f(y+)$. Na osnovu monotonosti važi $f(y+) \leq f(x-)$. Prema tome, $r(y) < r(x)$. Sledi da tačaka prekida funkcije $f$ ne može biti više nego racionalnih brojeva. □

Neka je $(h_n)_n$ niz pozitivnih brojeva sa svojstvom da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ konvergira. Neka je $(x_n)_n$ niz različitih tačaka realne prave. Definišimo funkciju

$$h(x) = \sum_{x<x_n} h_n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tada je $h$ *funkcija skoka* koja odgovara nizovima $(x_n)_n$ i $(h_n)_n$.

Očigledno, $0 \leq h(x) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n < +\infty$, odakle sledi da je $h$ dobro definisana realna funkcija. Funkcija $h$ je rastuća na $\mathbb{R}$. Ako interval $(a,b)$ ne sadrži ni jednu tačku $x_n$, onda je $h$ konstantna funkcija na intervalu $(a,b)$.

Ako postoji broj $\epsilon > 0$ tako da u intervalu $(x_n - \epsilon, x_n)$ nema drugih tačka $x_k$, onda je $h(x) = h(x_n)$ za svako $x \in (x_n - \epsilon, x_n)$. U tom slučaju je $h$ neprekidna s leva u tački $x_n$. Pretpostavimo da za svako $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ postoji tačka $x_k \in (x_n - \epsilon_k, x_n)$. Tada postoji podniz $(x_{n_k})_k$ sa svojstvom $x_{n_k} < x_n$ i $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_n$. Tada je, očigledno, $\lim\limits_{k\to\infty} h(x_{n_k}) = h(x_n)$. Na kraju, neka je $(y_l)_l$ niz tačaka sa svojstvom $y_l < x_n$ i $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_n$. Tada za svako $k$ postoji tačka $x_{n_k}$ za svojstvom $y_l < x_{n_k} < x_n$. Sledi da je $\lim\limits_{l\to\infty} h(y_l) = h(x_n)$.

Dakle, funkcija $h$ je neprekdida s leva u svakoj tački iz $\mathbb{R}$. Specijalno, $h$ je neprekidna u skupu $\mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nije teško proveriti da je $h(x_n+) = \sum\limits_{x \le x_n} h_n$. Dakle, funkcija $h$ u svakoj tački $x_n$ ima skok jednak $h_n$.

**Teorema 2.3.3.** *Neka je $f$ monotono rastuća funkcija na segmentu $[a, b]$, koja je neprekidna s leva u svakoj tački iz $[a, b]$. Tada postoje: rastuća neprekidna funkcija $g$ i funkcija skoka $s$, tako da je $f = g + s$ na segmentu $[a, b]$.*

*Dokaz.* Neka je $(x_n)_n$ niz svih tačaka prekida funkcije $f$ na segmentu $[a, b]$. Neka je $h_n = f(x_n+) - f(x_n)$ i neka je $s(x) = \sum\limits_{x_n < x} h_n$. Tada je $s$ funkcija skoka, i $s$ je neprekidna s leva.

Neka je $g = f - s$. Ako je $x, y \in [a, b]$ i $x < y$, tada je

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= f(y) - f(x) - [s(y) - s(x)] \\ &= f(y) - f(x) - \sum_{x \le x_n < y} h_n. \end{aligned}$$

Na desnoj strani jednakosti je suma skokova funkcije $f$, koja ne može preći priraštaj funkcije $f$. Dakle, $g(y) \ge g(x)$.

Preostaje da se dokaže neprekidnost funkcije $g$. Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljna tačka i neka je $t$ skok funkcije $f$ u tački $x$ (eventualno je $t = 0$). Tada je

$$g(x-) = f(x-) - s(x-) = f(x-) - \sum_{x_n < x} h_n,$$

$$g(x+) = f(x+) - s(x+) = f(x+) - \sum_{x_n \le x} h_n.$$

Očigledno je $\sum\limits_{x_n \leq x} h_n - \sum\limits_{x_n < x} h_n = t$. Sada sledi $g(x+) - g(x-) = f(x+) - f(x-) - t = 0$. Prema tome, funkcija $g$ je neprekidna u tački $x$. □

Uslov neprekidnosti s leva funkcije $f$ u prethodnoj teoremi je usovljen jakim tvrđenjima teoreme. Naime, funkcija skoka je, po definiciji, neprekidna s leva, a funkcija $g$ je takođe neprekidna. Dakle, ukoliko želimo da oslabimo uslov neprekidnosti s leva funkcije $f$, neophodno je na opštiji način definisati funkciju skoka. Takvu funkciju zvaćemo stepenastom.

Neka je $f$ monotnono rastuća funkcija na segmentu $[a, b]$, i neka je $(x_n)_n$ skup svih tačaka prekida funkcije $f$na ovom segmentu. *Stepenasta funkcija*, koja odgovara funkciji $f$ na segmentu $[a, b]$, definisana je kao

$$s_f(x) = \begin{cases} f(a+) - f(a), & x = a, \\ [f(a+) - f(a)] + \sum\limits_{x_n < x} [f(x_n+) - f(x_n-)] & \\ \quad +[f(x+) - f(x)], & a < x \leq b. \end{cases}$$

**Teorema 2.3.4.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotono rastuća funkcija. Tada postoji neprekidna i rastuća funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, tako da je $f = g + s_f$, pri čemu je $s_f$ stepenasta funkcija koja odgovara funkciji $f$ na segmentu $[a, b]$.*

*Dokaz.* Funkcija $s_f$ je rastuća funkcija na sgmentu $[a, b]$. Neka je $g(x) = f(x) - s_f(x)$ za svako $x \in [a, b]$.

Dokazaćemo da je $g$ rastuća funkcija. Neka je $x, y \in [a, b]$ i $x < y$. Slično kao u dokazu prethodne teoreme, važi

$$\begin{aligned} & g(y) - g(x) = f(y) - f(x) - (s_f(y) - s_f(x)) \\ & = f(y) - f(x) + [f(x+) - f(x)] + \sum_{x \leq x_n < y} [f(x_n+) - f(x_n-)]. \end{aligned}$$

Izraz $[f(x+) - f(x)] + \sum\limits_{x \leq x_n < y} [f(x_n+) - f(x_n-)]$ nije veći od sume svih skokova funkcije $f$ na segmentu $[x, y]$, te stoga ne može biti veći od priraštaja funkcije na istom segmentu. Sledi da je $g(y) \geq g(x)$, te je funkcija $g$ rastuća na $[a, b]$.

Dokazaćemo da je $g$ neprekidna funkcija. Neka je $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup svih tačaka prekida funkcije $f$ na segmentu $[a, b]$. Razlikujemo tri slučaja.

1) Pretpostavimo da je $x \in [a, b] \setminus \operatorname{cl} M$. To znači da postoji neki interval $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, koji ne sadrži tačke skupa $M$, odnosno ne sadrži tačke prekida funkcije $f$. To znači da je $f$ neprekidna na $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, a takođe je $s_f$ konstanta na ovom intervalu. Dakle, $g$ je neprekidna funkcija u tački $x$, kao razlika dve neprekidne funkcije.

Ovaj slučaj se jednostavno proširuje na situaciju kada je $x = a$, ili je $x = b$.

2) Pretpostavimo da je $x \in \operatorname{iso} M$. Tada postoji interval $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, tako da je $x = x_n$ jedina tačka prekida funkcije $f$ na intervalu $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. Iz monotonosti funkcije $f$ sledi $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$, pri čemu bar u jednom slučaju važi stroga nejednakost. Tada je

$$s_f(t) = \begin{cases} f(x-), & x - \epsilon < t < x, \\ f(x), & t = x, \\ f(x+), & x < t < x + \epsilon. \end{cases}$$

Tada je

$$g(t) = f(t) - s_f(t) = \begin{cases} f(t) - f(x-), & x - \epsilon < t < x, \\ 0, & t = x, \\ f(x+) - f(t), & x < t < x + \epsilon \end{cases}$$

očigledno neprekidna funkcija u tački $x$. □

3) Neka je $x \in \operatorname{cl} M$. Pretpostavimo da postoji niz $(x_{n_k})_k$ sa svojstvom $x_{n_k} < x$ i $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Neka je $y_k$ proizvoljna tačka skupa $[a, b] \setminus M$, tako da je $x_{n_k} < y_k < x$. Tada je $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x$.

**Primer 2.3.1.** Neka je

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x = -1, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Tada je

$$s_f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ 3, & 0 < x < 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

U skladu sa našom terminologijom, funkcija $s_f$ jeste stepenasta funkcija, ali nije funkcija skoka, jer nije neprekidna s leve strane. Takođe je važno primetiti da $s_f$ nije neprekidna ni s desne strane. Uovom slučaju je $g(x) = -2$ za svako $x \in [-1, 1]$. Razlaganje $f = g + s_f$ je upravo opisano prethodnom teoremom.

## 2.4 Funkcije ograničene varijacije

**Definicija 2.4.1.** Neka je $f$ realna funkcija definisana na $[a, b]$. Ako postoji konstanta $C > 0$ tako da za svaku podelu $P$ segmenta $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

važi

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C,$$

onda je funkcija $f$ ograničene varijacije na $[a, b]$.

Skup svih funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$ označava se sa $BV[a, b]$.

**Definicija 2.4.2.** Ako je $f \in BV[a, b]$, tada je veličina

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f) = \sup_P \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

totalna varijacija funkcije $f$ na $[a, b]$, pri čemu je supremum uzet po svim podelama $P$ segmenta $[a, b]$.

Lako je uvideti da ako je $f$ monotona na segmentu $[a, b]$, onda je $f$ ograničene varijacije na $[a, b]$, pri čemu je $\mathrm{V}_a^b(f) \leq |f(b) - f(a)|$. Takođe, ako je $f \in BV[a, b]$, onda je $f$ ograničena funkcija na $[a, b]$.

Dokazaćemo osnovna tvrđenja o funkcijama ograničene varijacije.

**Teorema 2.4.1.** *Nweka je $f, g \in BV[a,b]$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je $\alpha f, f+g \in BV[a,b]$, $\mathrm{V}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \mathrm{V}_a^b(f)$ i $\mathrm{V}_a^b(f+g) \le \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$.*

*Dokaz.* Formula $\mathrm{V}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \mathrm{V}_a^b(f)$ je očigledno tačna, odakle sledi $\alpha f \in BV[a,b]$. Neka je $h = f + g$ i $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ proizvoljna podela segmenta $[a,b]$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \le \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g),$$

odakle sledi $\mathrm{V}_a^b(f+g) \le \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$. □

**Teorema 2.4.2.** *Neka je $f, g \in BV[a,b]$. Tada je $fg \in BV[a,b]$. Ako postoji konstanta $c > 0$ tako da je $|f(x)| \ge c$ za svako $x \in [a,b]$, tada je $1/f \in BV[a,b]$.*

*Dokaz.* Neka, je $f, g \in BV[a,b]$. Tada postoje konstante $M$ i $N$ tako da je $|f(x)| \le M$ i $|g(x)| \le N$ za svako $x \in [a,b]$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1}) + f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\
&\le M \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + N \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\
&\le M \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) + N \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).
\end{aligned}$$

Time je dokazano $fg \in BV[a,b]$. Drugi deo tvrđenja ostavljen je čitaocu za samostalan rad. □

**Teorema 2.4.3.** *Neka je $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, i neka je $f$ realna funkcija definisana na segmentu $[a,b]$. Tada je $f \in BV[a,b]$, ako i samo ako je $f \in (BV[a,c]) \cap (BV[c,b])$. Pri tome je*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f).$$

*Dokaz.* $\Longrightarrow$ : Neka je $f \in BV[a,b]$. Posmatrajmo podele $P_1$ i $P_2$ segmenata $[a,c]$ i $[c,b]$ redom, odnosno

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b.$$

Očigledno, $P = P_1 \cup P_2$ je podela segmenta $[a,b]$. Stoga je

$$\sum_{k=1}^{m} |f(y_k) - f(y_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \le \operatorname*{V}_a^b(f).$$

Sledi da je

$$\operatorname*{V}_a^c(f) + \operatorname*{V}_c^b(f) \le \operatorname*{V}_a^b(f).$$

$\Longleftarrow$ : Neka je $f \in (BV[a,c]) \cap (BV[c,b])$, i neka je $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ podela segmenta $[a,b]$.

Ako je $c$ jedna tačka podele $P$, recimo $c = x_j$, tada je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=j+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le V_a^c(f) + \operatorname*{V}_c^b(f),$$

odakle sledi

$$\operatorname*{V}_a^b(f) \le \operatorname*{V}_a^c(f) + \operatorname*{V}_c^b(f).$$

Ako $c$ nije tačka podele $P$, tada postoji $j$ tako da je $x_j < c < x_{j+1}$. Stoga je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_j)|$$
$$+|f(x_{j+1}) - f(c)| + \sum_{k=j+2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \operatorname*{V}_a^c(f) + \operatorname*{V}_c^b(f),$$

odakle takođe sledi

$$\operatorname*{V}_a^b(f) \le \operatorname*{V}_a^c(f) + \operatorname*{V}_c^b(f).$$

Time je dokazano tvrđenje. □

**Posledica 2.4.1.** *Ako je $f \in BV[a,b]$, tada je $x \mapsto V(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$ rastuća funkcija na $[a,b]$.*

*Dokaz.* Neka je $a \le x_1 < x_2 \le b$ i $f \in BV[a,b]$. Na osnovu prethodne teoreme je

$$V(x_1) = \bigvee_a^{x_1}(f) \le \bigvee_a^{x_1}(f) + \bigvee_{x_1}^{x_2}(f) = \bigvee_a^{x_2}(f) = V(x_2).$$

□

**Teorema 2.4.4.** (Žordan[1]) *Neka je funkcija $f$ definisana na segmentu $[a,b]$. Tada je $f \in BV[a,b]$, ako i samo ako je $f = g - h$, pri čemu su $g$ i $h$ rastuće funkcija na $[a,b]$.*

*Dokaz.* $\Longleftarrow$ : Ako su $g$ i $h$ dve rastuće funkcije na $[a,b]$. Tada je $g, h \in BV[a,b]$ i $f = g - h \in BV[a,b]$.

$\Longrightarrow$ : Neka je $f \in BV[a,b]$ i $g(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$. Tada je $g$ rastuća funkcija na $[a,b]$. Neka je $h(x) = \mathrm{V}_a^x(f) - f(x)$. Tada je $f(x) = g(x) - h(x)$. Dovoljno je dokazati da je $h$ takođe rastuća funkcija na $[a,b]$.

Neka je $a < x_1 < x_2 < b$. Tada je $f(x_2) - f(x_1) \le |f(x_2) - f(x_1)| \le \mathrm{V}_{x_1}^{x_2}(f)$. Stoga je

$$h(x_2) - h(x_1) = \bigvee_a^{x_2}(f) - f(x_2) - \bigvee_a^{x_1}(f) + f(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2}(f) - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0.$$

Time je dokazano da je $f$ rastuća funkcija na $[a,b]$. □

Monotone funkcije jesu ograničene varijacije, ali nisu neprekidne. Takođe postoje neprekidne funkcije koje nisu ograničene varijacije.

**Primer 2.4.1.** Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tada je $f$ neprekidna funkcija na $[0,1]$, ali nije ograničene varijacije na $[0,1]$.

*Dokaz.* Neka je $P_n$ podela segmenta $[0,1]$:

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$$

[1]Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), francuski matematičar

za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| = \frac{1}{2n}+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Time je dokazano da $f$ nije ograničene varijacije na $[a,b]$. $\square$

**Posledica 2.4.2.** *Neka je $f \in BV[a,b]$. Tada funkcija $f$ može imati prekide samo prve vrste na $[a,b]$, i to njih najviše prebrojivo mnogo.*

# Glava 3

# Riman-Stiltjesov integral

## 3.1 Osnovne osobine

Neka su $f$ i $g$ realne funkcije, koje su definisane i ograničene na segmentu $[a,b]$, pri čemu je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Neka je

$$P: \; a = x_1 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

proizvoljna podela segmenta $[a,b]$. Neka je $d(P)$ dijametar podele $P$, odnosno $d(P) = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$. Neka su $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljne tačke za svako $k = 1, \ldots, n$, i neka je

$$S(f, g, P, [a,b]) = S(P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

Tada je $S(P)$ Riman[1]-Stiltjesova[2] suma funkcije $f$ u odnosu na funkciju $g$ (na segmentu $[a,b]$, koja odgovara podeli $P$).

**Definicija 3.1.1.** Ako postoji broj $I = I(f, g, [a,b])$ tako da za svako $\epsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da za svaku podelu $P$ segmenta $[a,b]$ i svaki izbor tačaka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ važi implikacija

$$d(P) < \delta \implies |S(P) - I| < \epsilon,$$

[1]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar

[2]Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), holandski matematičar

tada je broj $I$ Riman-Stiltjesov integral funkcija $f$ u odnosu na funkcij $g$ na segmentu $[a, b]$. Tada je funkcija $f$ integrabilna u Riman-Stiltjesovom smislu (RS-integrablina) u odnosu na $g$ na segmentu $[a, b]$, i

$$I = \int_a^b f dg.$$

# Literatura


[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed point theory and its applications*, Cambridge University PRess, Cambridge, 2001.

[2] S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

[3] D. S. Đorđević, *Matematika II za studente fizike, prvi deo*, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2004.

[4] M. Eisenberg, *Topology*, Holt, Rinehat and Winston INC., New York, 1974.

[5] M. A. Khamsi, W. Kirk, *An introduction to metric spaces and fixed point theory*, John Wiley & Sons, INC. New York, 2001.

[6] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi teorii funkicii i funkcionalnogo analiza*, Nauka, Moskva, 1989.

[7] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza: elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1980.

[8] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, prvio dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[9] B. Mirković, *Teorija mera i integrala*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[10] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[11] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGrow-Hill, New Yokr, 1987.

[12] G. Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics, with applications to Schrödinger operators*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

[13] W. F. Trench, *Introduction to real analysis*, Free Edition, 2010.