Funkcije u prirodoslovlju

Priručnik za nastavnike

Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje*

Izdavač

Gimnazija Petra Preradovića
Virovitica

Naslov Priručnik za nastavnike fakultativnog predmeta *Funkcije u prirodoslovlju*

Radni naziv kurikuluma *Funkcije u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u prirodoslovlju*

Izdavač Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

Za izdavača Jasminka Viljevac

Urednik Jasminka Viljevac

Autori Kata Vidaković, Danijela Babić, Dario Kovač, Josip Mikolašević, Marija Vidalina

Supervizori Ružica Vuk, Vlado Halusek, Danijel Jukopila, Aneta Copić, Tanja Mamić, Renata Matoničkin Kepčija

Supervizorica za jezik i gramatiku Izabela Babić

Oblikovale naslovnicu i grafički uredile Mateja Uzelac, Nikolina Hečimović

Dizajn logotipa projekta Grafoprojekt, Virovitica

Podatak o izdanju 1. izdanje

Mjesto i godina izdavanja Virovitica, 2016.

Naziv tiskare i sjedište Grafoprojekt, Virovitica

CIP zapis je dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140602057.

ISBN 978-953-8147-01-2

Ova publikacija rezultat je projekta *Zajedno kroz prirodoslovlje* koji su provele nositelj projekta Gimnazija Petra Preradovića iz Virovitice s partnerima Srednjom školom Marka Marulića Slatina i Srednjom školom „Stjepan Ivšić" Orahovica od 23. listopada 2015. do 23. listopada 2016. godine. Projekt je u cijelosti financirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda, a financijska sredstva u iznosu od 2 260 369,46 kn osigurana su temeljem natječaja *Promocija kvalitete i unaprjeđenja sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*.

Sadržaj ove publikacije isključiva je odgovornost Gimnazije Petra Preradovića, Virovitica.

Kurikulumi i svi radni materijali jesu razvojni; mogu se dopunjavati, popravljati i mijenjati.

Ova publikacija dostupna je na hrvatskom jeziku u elektroničkom obliku na mrežnoj stranici http://www.gimnazija-ppreradovica-vt.skole.hr/.

Riječi i pojmovni sklopovi koji imaju rodno značenje, bez obzira na to jesu li u tekstu korišteni u muškom ili ženskom rodu, odnose se na jednak način na muški i ženski rod.

Europska unija
Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda
Ulaganje u budućnost

Gimnazija Petra Preradovića Virovitica

Srednja škola Marka Marulića, Slatina

Srednja škola "Stjepan Ivšić" Orahovica

Funkcije u prirodoslovlju

PRIRUČNIK ZA NASTAVNIKE

Kata Vidaković, prof. matematike i fizike

Danijela Babić, prof. matematike i informatike

Dario Kovač, prof. povijesti i geografije

Josip Mikolašević, mag. educ. math. et inf.

Marija Vidalina, mag. educ. math. et inf.

Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica
Virovitica, 2016.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

U vašim je rukama priručnik za nastavnike fakultativnog predmeta nastao kao rezultat projekta *Zajedno kroz prirodoslovlje*, a financirala ga je Europska unija iz Europskog socijalnog fonda u okviru natječaja *Promocija kvalitete i unaprjeđenje sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*. Vrijednost projekta bila je 2 260 369,46 kuna, a trajao je od 23. 10. 2015. do 23. 10. 2016. godine.

Projekt *Zajedno kroz prirodoslovlje* prijavila je Gimnazija Petra Preradovića iz Virovitice, a partneri su joj bili Srednja škola Marka Marulića iz Slatine i Srednja škola „Stjepan Ivšić" iz Orahovice.

Cilj projekta bio je uspostava programskih, kadrovskih i materijalnih uvjeta u gimnazijama Virovitičko-podravske županije koji će učenicima omogućiti stjecanje dodatnih kompetencija u području prirodoslovlja, matematike i informacijsko-komunikacijskih tehnologija.

Kurikulumi su zasnovani na ishodima učenja i izrađeni prema principima Hrvatskog kvalifikacijskog okvira (Zakon o HKO-u, MZOS 2013.) čime izravno doprinose njegovom daljnjem razvoju i provedbi.

Suradnički su ih izrađivali nastavnici Matematike, Informatike i prirodoslovnih predmeta triju gimnazija, stručnjaci na polju pedagogije i metodologije te profesori sveučilišnih kolegija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Ciljne skupine ovog projekta jesu: nastavnici, učenici, stručni suradnici, vanjski stručnjaci i ravnatelji.

Sudjelovanjem ravnatelja triju gimnazija u provedbi projekta naglašena je važnost modernizacije kurikuluma za obrazovne ustanove. Ojačani kapaciteti gimnazija za izradu i provedbu inovativnih fakultativnih nastava (ljudski i materijalni potencijali) čine ustanovu atraktivnom i poželjnom za nastavak obrazovanja svim učenicima zainteresiranim za prirodoslovlje.

Kako bi podržali razvoj novih fakultativnih programa u školama, ali i doprinijeli razvoju programa svojim stručnim znanjima iz područja pedagogije/psihologije, stručni suradnici iz gimnazija sudjelovali su u edukacijama za razvoj kurikuluma temeljenog na ishodima učenja i unaprjeđenje nastavnih kompetencija. Stečenim znanjem i vještinama pružili su podršku ostalim nastavnicima za razvoj i implementaciju drugih fakultativnih programa, ali i prilagođavanju postojećih nastavnih programa zahtjevima HKO-a.

Postojeći su gimnazijski programi zastarjeli i nedovoljno su prilagođeni promjenama u suvremenom društvu. Naročito zabrinjava zastarjelost u prirodoslovnom i ICT području. Rezultati PISA istraživanja upućuju da su rezultati hrvatskih 15-godišnjaka ispod prosjeka u matematičkoj i prirodoslovnoj pismenosti. Često učenici nisu sposobni povezati znanja iz različitih nastavnih predmeta ili to čine površno i nesustavno. Znanja stečena u gimnazijskom nastavnom procesu uglavnom su teorijska i udaljena od neposredne životne zbilje. Stoga se nameće potreba za povezivanjem škole i života, znanja i vrijednosti, znanstvenih spoznaja i prakse.

Posljednjih godina učinjene su značajne promjene u smjeru poboljšanja hrvatskog obrazovnog sustava u predškolskom i osnovnoškolskom sektoru (HNOS, NOK), srednjem školstvu (reforma strukovnog obrazovanja, državna matura, NOK) i visokom školstvu (Bologna proces), a dovršen je i *Hrvatski kvalifikacijski okvir* (HKO) sukladno *Europskom kvalifikacijskom okviru* (EQF). Međutim gimnazijski kurikulum nije značajno strukturno promijenjen već pedesetak godina. Aktualni nastavni programi za gimnazije potječu iz 1994. i 1995. godine, a nastavni planovi iz 1995. godine i nisu zasnovani na ishodima učenja prema instrumentariju Hrvatskoga kvalifikacijskog okvira. Predmetna područja slabo su povezana, iako HKO i NOK omogućuju i potiču smisleno povezivanje svih sastavnica sustava u skladnu cjelinu. Nedostatno su zastupljeni novi oblici učenja i poučavanja, a osobito primjerena upotreba suvremenih tehnologija u poučavanju i učenju.

Naš doprinos promjenama koje svi očekuju jest osam novih kurikuluma fakultativne nastave s priručnicima za nastavnike, priručnicima za učenike te digitalnim radnim materijalima u Moodle-u.

Radni nazivi kurikuluma govore o sadržaju kurikuluma i o smjeru kojim idemo: Zemlja u geografiji, fizici i matematici, Linearna funkcija i vektori u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u obradi eksperimenata u fizici, Funkcije u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u prirodoslovlju, Biološki sustavi u ekologiji i matematici, Biologija s kemijom u životnim procesima, Termodinamika i kvantna mehanika u fizici i kemiji u računima i eksperimentima, Fizikalni eksperimenti i modeli kao osnova rada tehničkih uređaja i Informatika. Nazivi fakultativnih predmeta koji su iz njih proizašli jesu:

1. *Geografija rizika i klimatske promjene*
2. *Linearna funkcija i vektori u eksperimentima*
3. *Funkcije u prirodoslovlju*
4. *Biološki sustavi i matematika*
5. *Biologija s kemijom u životnim procesima*
6. *Fizikalna kemija*
7. *Fizikalni eksperimenti*
8. *Informatika u multimediji i dizajnu.*

UVOD

Funkcije u prirodoslovlju (radni naziv ***Funkcije u matematičkom programu GeoGebra i njihova primjena u prirodoslovlju***) kao fakultativni predmet omogućit će učenicima kvalitetno izučavanje matematičkih funkcija obrađenih računalnim programom. U svijetu gdje se znanstvene spoznaje neprestano umnožavaju, vrijeme utrošeno na poučavanje predmeta važna je komponenta obrazovnog procesa. Povezivanjem unutar predmeta više grana prirodoslovnih znanosti: fizike, kemije, biologije, geografije i matematike ostvarena je multidisciplinarnost i racionalizacija poučavanja.

Matematičari vole isticati da je matematika svuda oko nas, ne samo u temeljnim prirodnim zakonima, nego i u društvenim procesima. Usvojena matematička znanja, a naročito dublje razumijevanje matematičkog koncepta Algebra i funkcije, kao i njegova praktična primjena u prirodoslovlju, nužan je preduvjet svim učenicima koji nastavljaju obrazovanje na STEM učilištima. Također za znanstveno istraživanje neophodna je sposobnost primjene matematičkog znanja na modeliranje prirodoslovnih problema. Odabirom i izučavanjem predmeta *Funkcije u prirodoslovlju* učenici će već na srednjoškolskoj razini naučiti: uočiti problem, analizirati njegove sastavne elemente, pronaći odgovarajuća rješenja te ih kreativno interpretirati. Ranim usvajanjem osnovne metodologije istraživačkog rada lakše će se u budućnosti uključiti u svijet znanosti i tehnologije. Korištenjem računala u procesu poučavanja mukotrpno crtanje i analiziranje grafičkih prikaza primjenom matematičkih programa postaje lako i zanimljivo.

Učenici će osim matematičke steći kompleksniju digitalnu i prirodoslovnu kompetenciju što će ih učiniti spremnijima za nastavak obrazovanja u STEM područjima.

Kurikulum i svi radni materijali su razvojni. Mogu se dopunjavati, popravljati i mijenjati.

Želimo vam puno uspjeha.

PRIJEDLOG IZVEDBENOG KURIKULUMA

DOMENA	TEMA	ISHODI	PREDVIĐENI BROJ SATI	NAPOMENE
1. SVOJSTVA I GRAFIČKI PRIKAZI OSNOVNIH MATEMATIČKIH FUNKCIJA U PROGRAMU GEOGEBRA	Uvod	Razlikuje područje definicije funkcije od područja vrijednosti. Prepoznaje svojstva funkcije: parnost, neparnost, periodičnost i monotonost. Povezuje pojam nultočke s presjekom grafa funkcije s koordinatnim osima. Prepoznaje klasu funkcije (linearnu, kvadratnu, eksponencijalnu, logaritamsku i sve trigonometrijske funkcije) zadanu različitim prikazima.	2	
	Linearna funkcija		2	
	Kvadratna funkcija		4	
	Eksponencijalna funkcija		4	
	Logaritamska funkcija		5	
	Trigonometrijske funkcije		12	
	Projektni zadaci		6	
2. PRIMJENE OSNOVNIH MATEMATIČKIH FUNKCIJA U PROGRAMU GEOGEBRA	Uvod	Primjenjuje linearnu i kvadratnu funkciju u primjerima gibanja. Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju u primjerima: razmnožavanja / porasta broja bakterija, problemima radioaktivnog raspada / starost organizma, zakona hlađenja ili grijanja i rasta stanovništva. Primjenjuje funkcije sinusa i kosinusa u opisivanju prostiranja valova, harmonijskih	1	
	Linearna funkcija i njena primjena		4	
	Kvadratna funkcija i njena primjena		6	
	Eksponencijalna funkcija i njena primjena		8	
	Logaritamska funkcija i njena primjena		4	
	Trigonometrijske funkcije i njihove primjene		4	

		oscilacija, predstavljanju izmjenične struje i bioloških promjena.		
	Projektni zadaci	Primjenjuje mogućnosti programa za uočavanje međuovisnih veličina. Rješava zadani problem analitički uočavajući međuovisne veličine. Uočava međuovisne veličine mijenjajući parametre u programu dinamične geometrije. Analitički rješava problem uočavajući međuovisne veličine. Koristi sučelje matematičkog programa GeoGebra za crtanje grafičkog prikaza. Koristi se alatima matematičkog programa GeoGebra za analizu grafičkog prikaza. Interpretira rezultate dobivene analizom međuovisnih veličina. Kreira vlastite aplete u programu GeoGebra. Predstavlja svoj rad poštujući pravila izvođenja prezentacije.	8	

METODIČKE PREPORUKE

Nastavnicima koji će provoditi program fakultativnog predmeta *Funkcije u prirodoslovlju* ostavljena je potpuna sloboda pri odabiru broja sati za pojedinu nastavnu temu, kako obrade tako i vježbi koje je moguće kombinirati sa sadržajima drugih nastavnih predmeta. Povezivanje nastave matematike s drugim nastavnim predmetima omogućuje učenicima bolje razumijevanje i primjenu naučenog u svakodnevnom životu. Preporuka je da se projektni zadatci zadaju nakon obrađenih nastavnih cjelina, da budu jasni i da bude definirano trajanje njihove izvedbe. Pri obradi i izlaganju nastavnog gradiva učenika se usmjerava na praktičnu i konkretnu primjenu znanja i digitalnih sadržaja. Nastavne cjeline mogu se obrađivati redoslijedom koji odgovara nastavniku. Nove sadržaje poželjno je poučavati na način da se učenicima ukratko demonstriraju, a zatim da ih se potiče na samostalno istraživanje problema i pronalaženje mogućnosti rješavanja uz pomoć računalnog programa GeoGebra. Također je poželjno učenike poticati da sami uočavaju i ispravljaju pogreške u postupku modeliranja i rješavanja problema jer im se na taj način daje mogućnost da rad doživljavaju kao priliku da nauče nešto novo.

Dobro je učenike i njihov rad kontinuirano pratiti i ocjenjivati, uključiti ih u proces ocjenjivanja i vrednovanja, kako vlastitog uratka tako i onih drugih učenika. Na taj se način potiče razvoj samostalnosti i odgovornosti za svoje postupke i razvija motivacija za daljnji rad.

Kako bi izvođenje nastave bilo kvalitetno potrebno je nastavu provoditi u umreženoj informatičkoj učionici u kojoj je za svakog učenika osigurano računalo s odgovarajućom softverskom podrškom te nastavničko računalo i projektor.

PREPORUKE ZA VREDNOVANJE USVOJENOSTI ISHODA

Vrednovanje je sustavno prikupljanje podataka u procesu učenja i postignutoj razini kompetencija u skladu s unaprijed definiranim i prihvaćenim načelima, postupcima i elementima. Njegova svrha nije samo "mjerenje" učeničkih znanja i vještina, nego prvenstveno poboljšanje učenja i razumijevanja nastavnih sadržaja (Strategija obrazovanja, znanosti i tehnologije, listopad 2014.).

U fakultativnom predmetu *Funkcije u prirodoslovlju* vrednovanje je sastavni dio procesa učenja i poučavanja sa svrhom davanja obavijesti svim sudionicima procesa o razini usvojenosti znanja i postignutim vještinama. Glavni cilj procesa vrednovanja jest poticanje napretka učenika i izgradnja pozitivnoga stava prema učenju odabranog predmeta. Na koji način i što se vrednuje, planira se i najavljuje na početku procesa poučavanja. Učenike se na razumljiv način upoznaje s očekivanim ishodima i kriterijima njihova vrednovanja kao pokazateljima razine njihove usvojenosti.

Ishodi učenja predstavljaju operacionalizaciju kompetencija pomoću aktivnosti koje se mogu opažati i mjeriti. Suvremeni školski sustav treba omogućiti polaznicima postizanje potrebnih kompetencija za tržište rada i nastavak obrazovanja.

Elementi vrednovanja jesu odrednice što se vrednuje u pojedinome predmetu. Određeni su u nacionalnim kurikulumima za svaki nastavni predmet posebno.

Elementi vrednovanja

1. Usvojenost znanja i vještina

- opisuje matematičke pojmove
- odabire pogodne i matematički ispravne procedure te ih provodi
- upotrebljava i povezuje matematičke koncepte.

2. Matematička komunikacija

- koristi se odgovarajućim matematičkim jezikom (zapisi, simboli i terminologija) pri usmenom i pisanom izražavanju
- koristi se odgovarajućim matematičkim prikazima za predstavljanje podataka
- iskazuje uočene povezanosti u različitim matematičkim prikazima
- svoje razmišljanje iznosi cjelovitim, suvislim i sažetim matematičkim rečenicama
- postavlja pitanja i odgovara na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljenoga pitanja
- organizira informacije u logičku strukturu
- primjereno se koristi tehnologijom.

3. Rješavanje problema

- prepoznaje relevantne elemente problema
- uspješno primjenjuje odabranu matematičku metodu pri rješavanju problema
- modelira matematičkim zakonitostima rješavanje problemske situacije uz raspravu
- ispravno rješava probleme u različitim kontekstima
- provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rezultata
- generalizira rješenje.

Elementi su odraz ciljeva predmeta i vrednuju se u postocima u omjeru 30 : 30 : 40.

Preporučeni pristupi te metode i tehnike vrednovanja odgojno-obrazovnih ishoda u predmetu

Pristupi i metode vrednovanja jesu postupci i načini vrednovanja koji se primjenjuju u različitim pristupima vrednovanju (iako su neke pogodnije za određene pristupe).

- **Vrednovanje za učenje** jest pristup vrednovanju koji je sastavni dio kontinuiranog procesa učenja i poučavanja, odvija se za vrijeme učenja i poučavanja te kao takav ponajprije služi unaprjeđivanju i planiranju budućeg učenja i poučavanja. U pravilu ne rezultira ocjenom, nego kvalitativnom povratnom informacijom i razmjenom iskustava o procesima učenja i usvojenosti znanja i vještina u odnosu na postavljena očekivanja. U vrednovanju za učenje koriste se: rubrike, ljestvica procjena, postavljanje pitanja učenicima, anegdotske zabilješke, učeničke mape, opažanja i dr.
- **Vrednovanje naučenog (sumativno vrednovanje)** jest pristup vrednovanju koji podrazumijeva procjenu razine postignuća učenika nakon određenog učenja i poučavanja tijekom školske godine ili na njezinu kraju. U pravilu rezultira ocjenom ili nekom drugom sumativnom procjenom. Za postupak vrednovanja koriste se pisane i usmene provjere znanja i vještina, mape radova (tzv. portfolio), praktični radovi, učenička izvješća (npr. o praktičnome radu, istraživanju i sl.), učenički projekti, rasprave (debate), eseji, simulacije i dr.
- **Vrednovanje kao učenje** jest pristup koji se temelji na ideji da učenici vrednovanjem uče, stoga nužno podrazumijeva aktivno uključivanje učenika u proces vrednovanja uz stalnu podršku učitelja kako bi se maksimalno potaknuo razvoj učeničkog autonomnog i samoreguliranog pristupa učenju. U vrednovanju kao učenju metode se zasnivaju na metodama samovrednovanja, odnosno samorefleksije te vršnjačkoga vrednovanja (npr. samovrednovanje uz uporabu rubrika, ljestvice procjene, dnevnici učenja, konzultacije s učiteljem i dr.).

S obzirom na **svrhu vrednovanja** razlikuju se:

• **dijagnostičko** – provodi se radi utvrđivanja kvalitete i razine učeničkoga znanja i vještina prije početka procesa učenja i poučavanja, npr. na početku nastavne godine. Nastavnik prilagođava i planira učenje i poučavanje u odnosu na rezultate dijagnostičkog vrednovanja. Dijagnostičkim se vrednovanjem može koristiti i za određivanje prikladnog oblika odgojno-obrazovne podrške pojedinim učenicima.

• **formativno** – vrednovanje učeničkih postignuća koje se odvija za vrijeme učenja i poučavanja radi davanja informacija o učeničkom napredovanju i unapređivanja budućeg učenja i poučavanja, poticanja učeničkih refleksija o učenju, utvrđivanja manjkavosti u učenju, prepoznavanja snaga te planiranja budućega učenja i poučavanja.

• **sumativno** – podrazumijeva procjenu razine učenikova postignuća na kraju procesa učenja (nastavne cjeline, polugodišta te godine učenja i poučavanja). U pravilu rezultira ocjenom i/ili formalnim izvješćem, tj. svjedodžbom (vrednovanje naučenoga).

Formiranje zaključne ocjene

Na kraju svake nastavne/školske godine iz fakultativnog predmeta donosi se zaključna ocjena koja sažima podatke o učenikovu postignuću u učenju predmeta za što se rabi ljestvica školskih ocjena od 1 (nedovoljan) do 5 (odličan). Značenje zaključne ocjene proizlazi iz usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda definiranih i razrađenih u kurikulumima fakultativnog predmeta, a zaključna ocjena predstavlja sumarnu procjenu usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda u razdoblju učenja i poučavanja predmeta.

Elementi vrednovanja	**Ocjena**			
	dovoljan (2)	**dobar (3)**	**vrlo dobar (4)**	**odličan (5)**
Usvojenost znanja i vještina	Prisjeća se nastavnih sadržaja uz pomoć nastavnika.	Poznaje osnovne pojmove.	Poznaje sve nastavne sadržaje, ali ih ne povezuje sa sličnim sadržajima.	Povezuje usvojeno znanje s drugim sličnim sadržajima.
Matematička komunikacija	Koristi se odgovarajućim matematičkim jezikom (zapisi, simboli i terminologija) pri usmenom i pisanom izražavanju.	Koristi se odgovarajućim matematičkim prikazima za predstavljanje podataka te se primjereno koristi tehnologijom.	Iskazuje uočene povezanosti u različitim matematičkim prikazima. Svoje razmišljanje iznosi cjelovitim, suvislim i sažetim matematičkim rečenicama.	Postavlja pitanja i odgovara na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljenoga pitanja. Organizira informacije u logičku strukturu.
Rješavanje problema	Radi uz pomoć i ne uočava pogreške samostalno.	Radi uz povremenu pomoć, pogreške uočava i ispravlja ih uz pomoć nastavnika.	Primjenjuje stečeno znanje, samostalno uočava pogreške i ispravlja ih.	Kreativno primjenjuje usvojene vještine u novim situacijama.

Pri donošenju zaključne ocjene nastavnik bi trebao razmotriti kurikulumom definirane razine usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda koje u četirima kategorijama (zadovoljavajuća, dobra, vrlo dobra, iznimna) određuju očekivanu izvedbu učenika, odnosno opisuju širinu i dubinu znanja i stupanj razvijenosti vještina. Iako te razine usvojenosti pojedinog ishoda ne predstavljaju izravno školske ocjene, one mogu poslužiti kao pomoć nastavniku u određivanju profila učenika prema usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda tijekom cijele nastavne godine. Zadovoljavajuća razina usvojenosti odgojno-obrazovnih ishoda posredno određuje nedovoljnu usvojenost znanja i vještina jer nastavnik na temelju toga može odrediti do koje razine učenik mora usvojiti odgojno-obrazovne ishode da bi dobio prolaznu zaključnu ocjenu u predmetu. Ocjenjivanje je stoga kriterijsko, što znači da se ne očekuje normalna raspodjela ocjena unutar razrednoga odjela, odnosno ne očekuje se da će zadani postotak učenika unutar razrednoga odjela ostvariti pojedinu ocjenu.

Zainteresirani dionici mogu redovito dobivati obavijesti o aktivnostima i rezultatima rada putem mrežne stranice i sustava za učenje na daljinu.

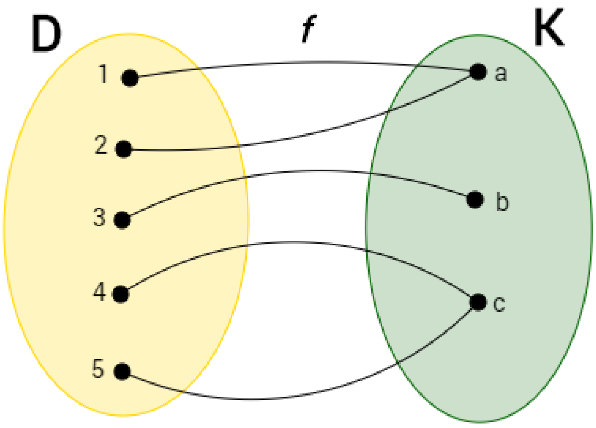
1. SVOJSTVA I GRAFIČKI PRIKAZI OSNOVNIH MATEMATIČKIH FUNKCIJA U PROGRAMU GEOGEBRA

1.1. Uvod

Funkcije uz brojeve predstavljaju temeljni pojam matematike. Njima se opisuje utjecaj jednog parametra na određeni rezultat.
Riječ ***funkcija*** prvi je koristio Leibnitz u radu iz 1694. kako bi opisao veličinu pridruženu krivulji, a definiciju funkcije prvi je iskazao Dirichlet:
Funkcija (preslikavanje) $\boldsymbol{f}$ pravilo je koje svakom elementu $\boldsymbol{x}$ skupa $D (x \in D)$ pridružuje točno jedan element $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ skupa $K (y \in K)$. Matematički zapisujemo na način:

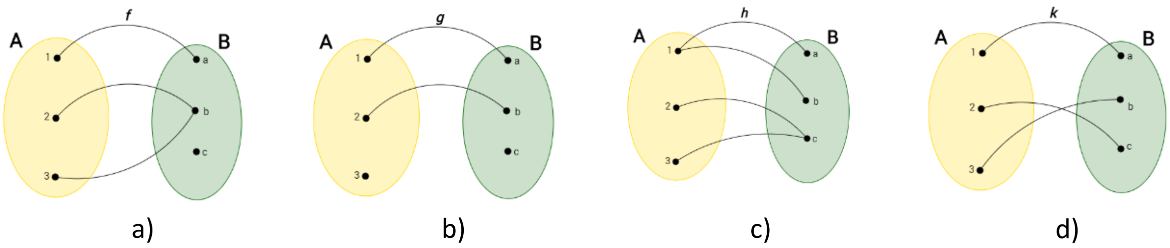
$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \rightarrow \boldsymbol{K} \ \boldsymbol{ili} \ \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}.$$

Skup *D* zovemo **domena** ili područje definicije funkcije *f*, a skup *K* zovemo **kodomena** ili područje vrijednosti funkcije *f*.



Slika 1. Funkcija prikazana Venn-Eulerovim dijagramom

Primjer 1.
Koji od sljedećih dijagrama prikazuju funkciju?



Rješenje: Dijagrami a) i d) prikazuju funkcije prema definiciji.

Iako domena i kodomena mogu biti odabrane na mnogobrojne načine, promatrat ćemo samo one koje su podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Takve se funkcije zovu **realne funkcije**. Kod zadavanja realne funkcije često nije eksplicitno zadana domena funkcije.

U takvim se slučajevima podrazumijeva da je domena najveći skup vrijednosti varijable *x* za koje je funkcija f definirana, odnosno za koje je $f(x)$ realan broj. Domena funkcije f u tom se slučaju naziva **prirodnom domenom.**
Realna funkcija *f* zadana je:

i) svojom domenom (područjem definicije) D,
ii) svojom kodomenom (područje vrijednosti) K,
iii) postupkom pridruživanja $x \to f(x)$.

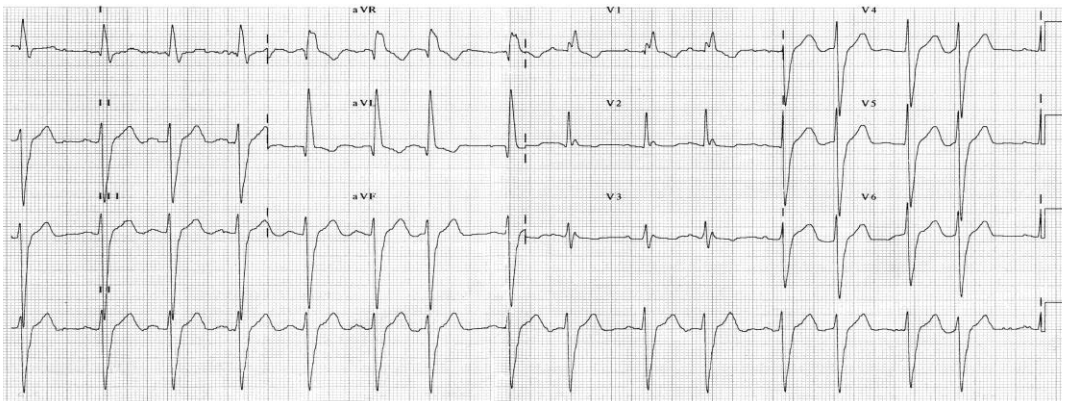
U matematici se funkcije zadaju:
- **analitički**, ako je pridruživanje kojim funkcija elementima iz domene pridružuje elemente iz kodomene navedeno formulom, na primjer:

$$f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 5, \quad h(x) = \log(4x + 1),$$
$$p(x) = 2^x - 3, \quad k(x) = 2\cos(\pi + x) - 1;$$

- **tablično**, ako u jednom retku za navedene vrijednosti nezavisne varijable navedemo u drugom retku i pripadne vrijednosti zavisne varijable tj. funkcijske vrijednosti, na primjer:

x	0	2	-3	$\frac{3}{4}$
$f(x)$	1	9	-11	4

- **grafički**, na traci ili ekranu kao slikoviti rezultat neprestanog mjerenja određenih veličina instrumentima poput elektrokardiografa, osciloskopa, seizmografa i sl.



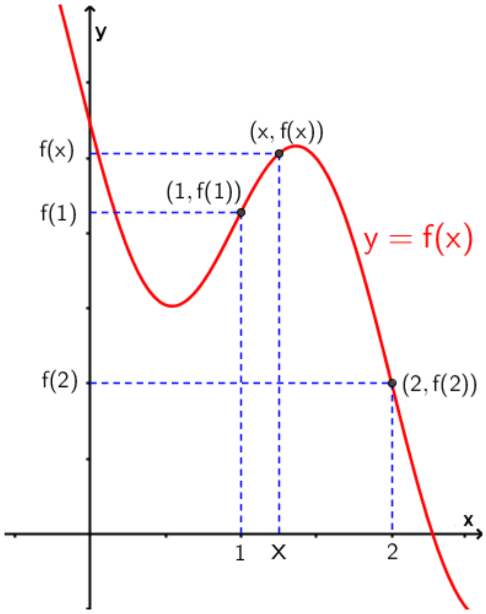
Slika 2. Snimka otkucaja srca napravljena EKG-om

Da bismo vizualizirali funkciju, tj. omogućili vizualnu prezentaciju podataka opisanih funkcijom u zadanim uvjetima, crtamo njen graf u koordinatnom sustavu.

Graf $\boldsymbol{\Gamma_f}$ funkcije f skup je svih točaka $(x, f(x))$, gdje je x iz domene D funkcije f:

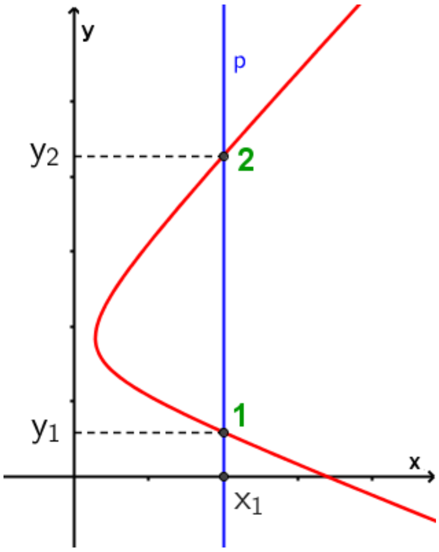
$$\boldsymbol{\Gamma_f = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}}$$

S grafa funkcije mogu se pročitati vrijednosti funkcije za bilo koji *x* iz domene funkcije:

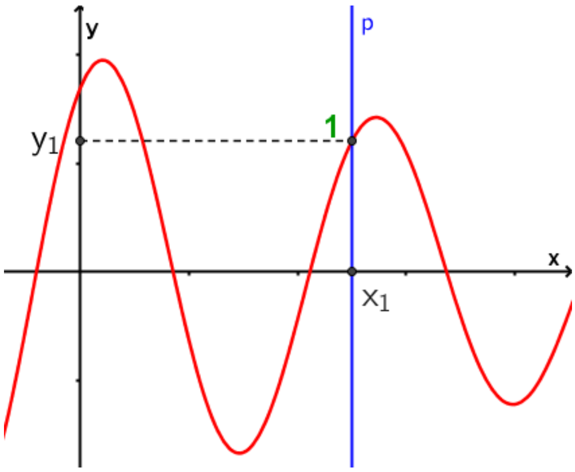


Slika 3. Vrijednosti funkcije u nekim točkama domene

Raznorazne krivulje prikazane u koordinatnom sustavu ne moraju uvijek prikazivati funkciju. Provjeru možemo provesti pomoću **vertikalnog testa**. Neka krivulja predstavlja graf funkcije $y = f(x)$ ako ne postoji ni jedan vertikalni pravac koji krivulju siječe u više od jedne točke.



Slika 4. Primjenom vertikalnog testa uočene su dvije točke presjeka s krivuljom



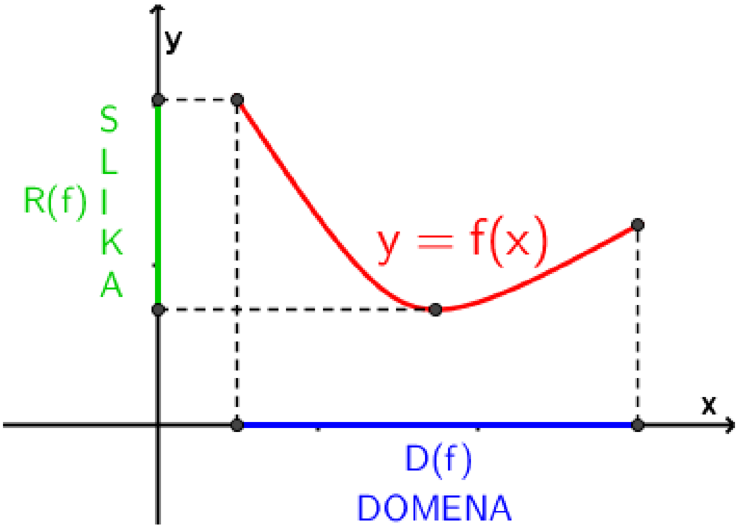
Slika 5. Primjenom vertikalnog testa uočena je jedna točka presjeka s krivuljom

Pitanje: Na kojoj je slici prikazana funkcija?
Odgovor: Funkcija je na slici 5.

Slika funkcije $f: D \to K$ u oznaci $\boldsymbol{R(f)}$ skup je svih vrijednosti koje može poprimiti funkcija *f*. Pišemo:

$$\boldsymbol{R(f) = \{f(x) | x \in D\}}$$

Kodomena funkcije obično je skup koji je širi od slike funkcije, a najčešće se za kodomenu realne funkcije uzima skup $\mathbb{R}$. Slika funkcije podskup je kodomene, $R(f) \subseteq K$. U sljedećem grafičkom prikazu domena funkcije f nalazi se na osi x, a slika funkcije na osi y:

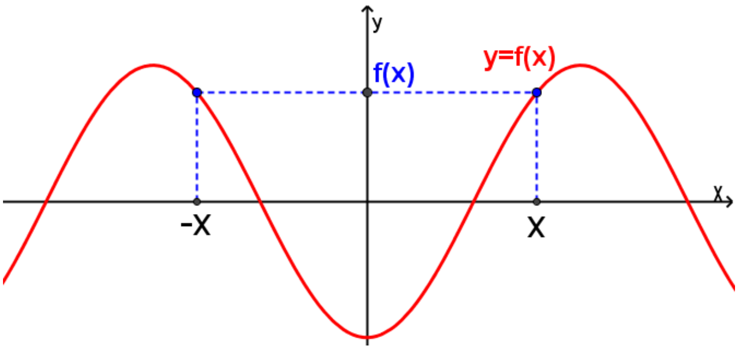


Slika 6. Grafički prikaz domene i slike funkcije

Prilikom proučavanja funkcija i njihovog grafičkog prikaza koristit ćemo različita svojstva funkcija. Navedimo neka od njih.

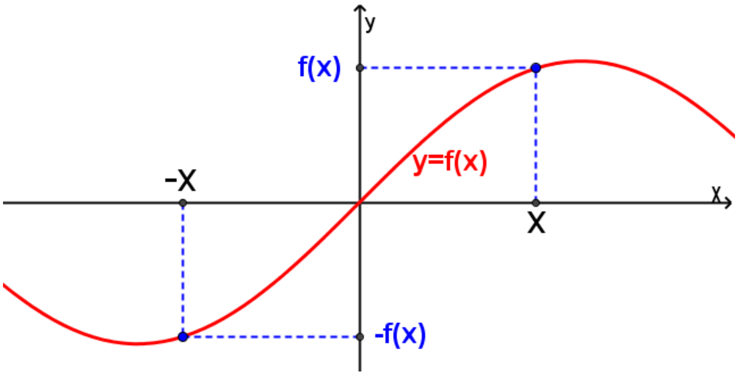
Parnost i neparnost: svojstvo koje utječe na simetričnost grafa funkcije.

Za funkciju $f: D \to \mathbb{R}$ kažemo da je **parna** ako je za sve vrijednosti $x \in D$ i $-x \in D$ te vrijedi $f(-x) = f(x)$. Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na y-os.



Slika 7. Prikaz parne funkcije

Ako za sve vrijednosti $x \in D$ i $-x \in D$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$, tada za funkciju f kažemo da je **neparna**. Graf neparne funkcije simetričan je s obzirom na ishodište.



Slika 8. Prikaz neparne funkcije

Primjer 2.

Provjerite koja je funkcija parna, a koja neparna:

a) $f(x) = log\frac{2x-1}{2x+1}$

b) $g(x) = 5 + 2x^2 - 4x^4$

Rješenje:

a) $f(-x) = log\frac{2(-x)-1}{2(-x)+1}$

$$f(-x) = log\frac{-2x-1}{-2x+1}$$

$$f(-x) = log\frac{-(2x+1)}{-(2x-1)}$$

$$f(-x) = log\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}$$

$$f(-x) = -log\frac{2x-1}{2x+1}$$

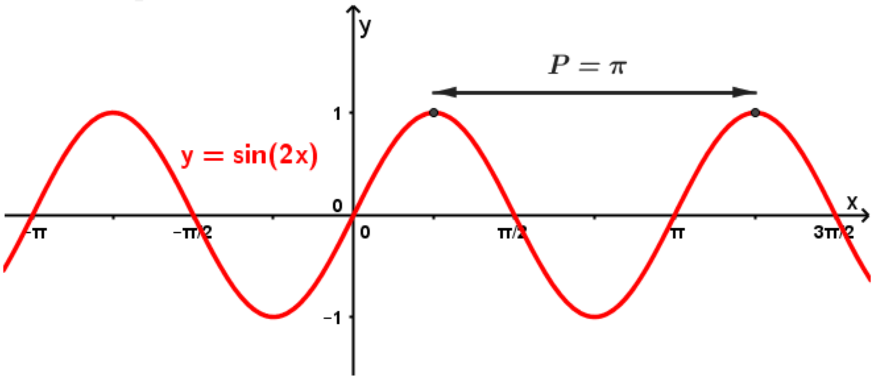
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$
f je neparna funkcija.

b) $g(-x) = 5 + 2(-x)^2 - 4(-x)^4$

$$g(-x) = 5 + 2x^2 - 4x^4$$

$g(x) = g(-x) \Rightarrow$ g je parna funkcija.

Periodičnost: svojstvo funkcije kojim se objašnjavaju ciklička ponavljanja pojava.
Za funkciju $f: D \to \mathbb{R}$ kažemo da je **periodična** ako postoji realni broj $P > 0$, ako je za svaki broj *x* iz domene funkcije *f* i broj *x + P* u domeni funkcije *f* te vrijedi $f(x + P) = f(x)$. Broj P naziva se period funkcije f. Najmanji broj P s navedenim svojstvom zovemo **temeljnim (osnovnim) periodom** periodične funkcije f.

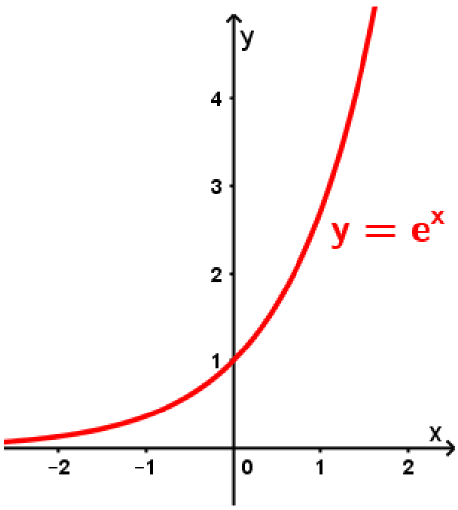


Slika 9. Prikaz periodične funkcije

Monotonost: Za funkciju $f: D \to \mathbb{R}$ kažemo da je **rastuća** na intervalu I iz domene ako za svaka dva broja x_1 i x_2 iz intervala I vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
Funkcija f **padajuća** je na intervalu I ako za svaka dva broja x_1 i x_2 iz intervala I vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ako umjesto nejednakosti $\leq$ ili $\geq$ vrijede stroge nejednakosti $<$ ili $>$, govori se o **strogo padajućoj**, odnosno **strogo rastućoj** funkciji.
Padajuće ili rastuće funkcije jednim se imenom nazivaju **monotonim funkcijama.** Intervali na kojima funkcija raste ili pada nazivaju se **intervali monotonosti.**

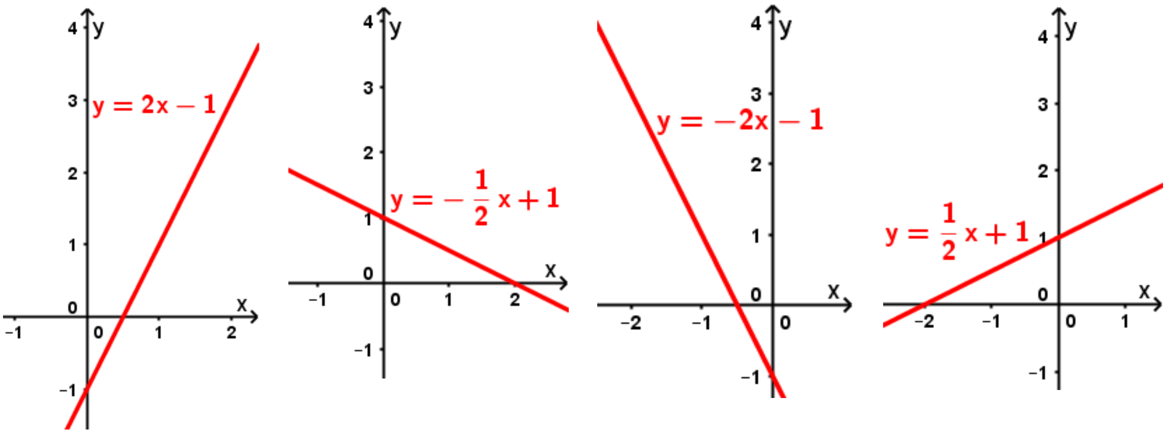


Slika 10. Prikaz rastuće funkcije

Primjer 3.

Ispitajte monotonost sljedećih funkcija analizirajući njihove grafove:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ c) $f(x) = -2x - 1$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



a) b) c) d)

U velikom broju slučajeva funkcija može biti kombinacija dviju ili više funkcija koje su povezane algebarskim operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja ili dijeljenja. U tom slučaju prirodna domena jest presjek domena zadanih funkcija.

Primjer 4.

Za realne funkcije $f(x) = 2x^2 + 1$ i $g(x) = -2x^2 - 3x + 4$ odredite $f + g$, $f - g, f \cdot g$ i $\frac{g}{f}$.

Rješenje:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 + 1 - 2x^2 - 3x + 4 = -3x + 5$

b) $(f - g)(x) = 2x^2 + 1 + 2x^2 + 3x - 4 = 4x^2 + 3x - 3$

c) $(f \cdot g)(x) = (2x^2 + 1) \cdot (-2x^2 + 3x + 4) =$

$= -4x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 2x^2 + 3x + 4 = -4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 3x + 4$

d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = (-2x^2 - 3x + 4) : (2x^2 + 1) = -1$

$\underline{+2x^2 \qquad +1}$

$-3x + 5$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = (-2x^2 - 3x + 4) : (2x^2 + 1) = -1 + \frac{-3x+5}{2x^2+1}$

Kompozicija ili slaganje je operacija nad funkcijama kojom jedna funkcija djeluje na izlaznu vrijednost druge funkcije.

Neka su funkcije $g: D_1 \to K_1$ i $f: D_2 \to K_2$ takve da je slika funkcije g podskup domene od f, tj. $R(g) \subseteq D_2$. Tada se **kompozicija** tih dviju funkcija $h: D_1 \longrightarrow K_2$ definira kao:

$$\boldsymbol{h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))}.$$

Čitamo: "f komponirano g" ili "f kružić g" i funkcija h predstavlja **složenu** funkciju.

Primjer 5.

Odredite kompozicije $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ funkcija $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ i $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Jesu li $f \circ g$ i $g \circ f$ jednake funkcije?

Rješenje:

a) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\sqrt{(x-1)^2} - 3\sqrt{x-1} + 4 =$
$= 2(x-1) - 3\sqrt{x-1} + 4 = 2x - 2 - 3\sqrt{x-1} + 4 = 2x - 3\sqrt{x-1} + 2$

b) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{2x^2 - 3x + 4 - 1} = \sqrt{2x^2 - 3x + 3}$

c) $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = 2(2x^2 - 3x + 4)^2 - 3(2x^2 - 3x + 4) + 4 =$
$= 8x^4 - 24x^3 + 50x^2 - 48x + 32 - 6x^2 + 9x - 12 + 4 = 8x^4 - 24x^3 + 44x^2 - 39x + 24$

d) $(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$

Dakle $f \circ g$ i $g \circ f$ nisu jednake funkcije.

Primjer 6.

Prikažite funkciju h kao kompoziciju dviju funkcija f i g ako je :

a) $h(x) = \sqrt{3x+2}$ b) $h(x) = \cos(x + \pi)$ c) $h(x) = \log(3x + 1)$

Rješenje:

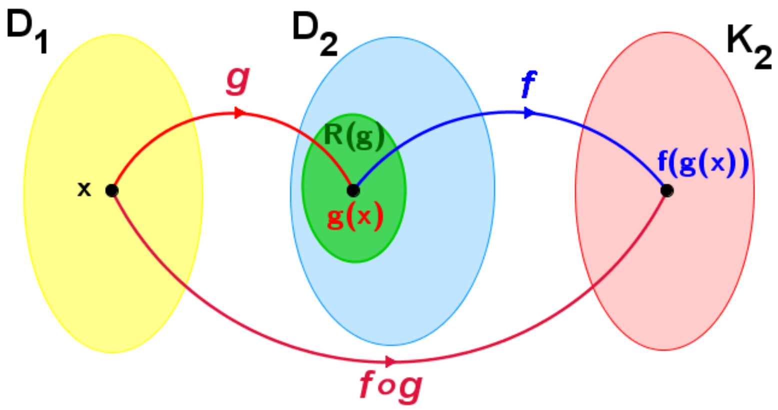
$h(x) = (f \circ g)(x)$ gdje su funkcije f i g:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = cosx$, $g(x) = x + \pi$

c) $f(x) = \log x$, $g(x) = 3x + 1$

U kompoziciji $h = f \circ g$ nezavisnu varijablu x funkcija g preslika u $g(x)$, a zatim funkcija f preslika element $g(x)$ u $f(g(x))$, što je prikazano na sljedećoj slici:



Slika 11. Kompozicija funkcija

Osnovne ili elementarne funkcije su*:* *1. Linearna funkcija*

2. Kvadratna funkcija

3. Eksponencijalna funkcija

4. Logaritamska funkcija

5. Trigonometrijske funkcije: Sinus

Kosinus

Tangens

Kotangens

1.2. Linearna funkcija

Matematička funkcija kojom se opisuju odnosi proporcionalnih veličina. Linearnu funkciju obično zadajemo analitički, tablično ili grafički.
Analitički zapis linearne funkcije $f(x) = ax + b$, gdje su *a, b* ∈ $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, koeficijenti, a x je promjenjiva veličina (varijabla funkcije).
Linearnu funkciju $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ određuje **skup uređenih parova** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ koje možemo prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Točke koje tako dobijemo pripadaju istom pravcu koji zovemo **graf linearne funkcije.** Njegova je jednadžba $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Zadatak 1.
Nacrtajte graf linearne funkcije $f(x) = 2x + 3$.

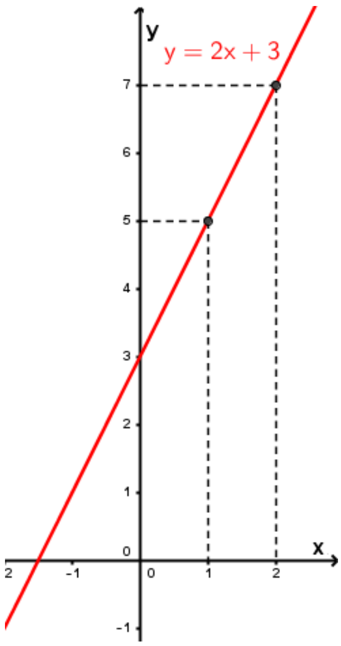
Rješenje:

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1 \qquad (-2\,,-1)$

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \qquad (0\,,3)$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \qquad (1\,,5)$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \qquad (2\,,7)$



Budući da je pravac određen s dvije točke, dovoljno je odrediti dva uređena para (x, y).
Parametar $\boldsymbol{a}$ određuje smjer (nagib pravca) i zove se **koeficijent smjera pravca**.

Tok linearne funkcije

Funkcija je rastuća na nekom intervalu *I* ako se povećanjem vrijednosti nezavisne varijable $(x \in I)$ povećava i vrijednost funkcije $(f(x))$. Linearna funkcija $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ rastuća je ako je koeficijent smjera $\boldsymbol{a} > 0$.

Funkcija je padajuća na nekom intervalu *I* ako se povećanjem vrijednosti nezavisne varijable $(x \in I)$ smanjuje vrijednost funkcije $(f(x))$. Linearna funkcija $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ padajuća je ako je koeficijent smjera $\boldsymbol{a} < 0$.

Ako je u pravilu pridruživanja funkcije $f(x) = ax + b$, parametar $a = 0$, onda funkcija ima oblik $f(x) = b$ i zove se **konstanta.** Graf konstante pravac je s jednadžbom $\boldsymbol{y = b}$ i paralelan je s osi x.

Nultočka linearne funkcije jest ona vrijednost varijable x za koju je vrijednost funkcije $f(x) = 0$.

Zadatak 2.

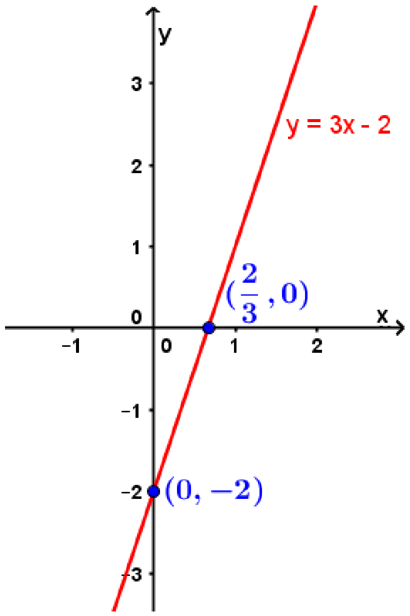
U programu GeoGebra nacrtajte graf linearne funkcije $f(x) = 3x - 2$.

a) Odredite nultočku i odsječak na y-osi.

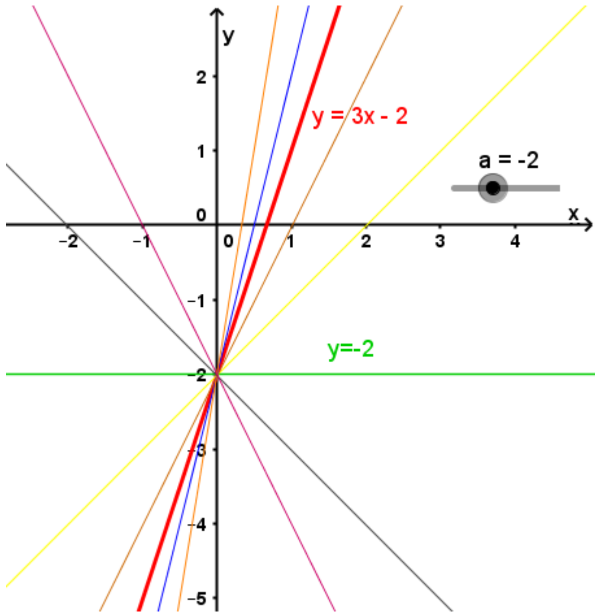
b) Uporabom klizača koeficijenta smjera linearne funkcije analizirajte graf.
Što se događa u trenutku kada je koeficijent smjera jednak nuli?

c) Uporabom klizača odsječka na y-osi analizirajte graf.

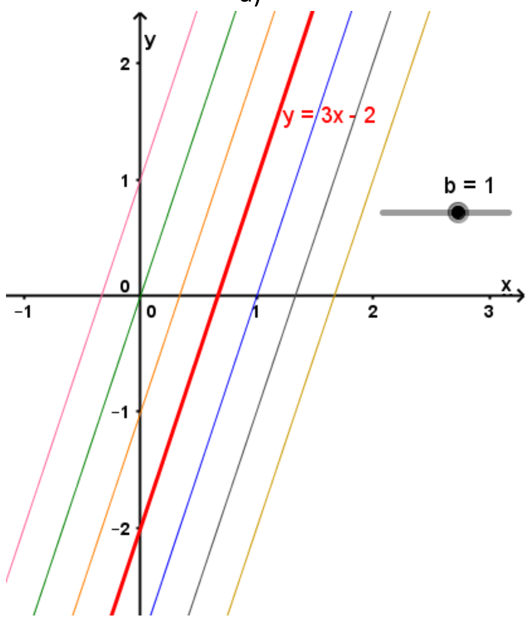
Rješenje:



a)



b)



c)

1.3. Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija ili **polinom drugog stupnja** jest funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R}.$$

Graf je kvadratne funkcije **parabola** jednadžbe $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Broj $\boldsymbol{a}$ nazivamo vodeći koeficijent, $\boldsymbol{b}$ linearni, a $\boldsymbol{c}$ slobodni koeficijent.

Nultočke kvadratne funkcije jesu sjecišta grafa funkcije s osi apscisa. Kako je $y = 0$, nultočke su rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Opće rješenje ove kvadratne jednadžbe glasi:

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{\boldsymbol{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}}{\boldsymbol{2a}}.$$

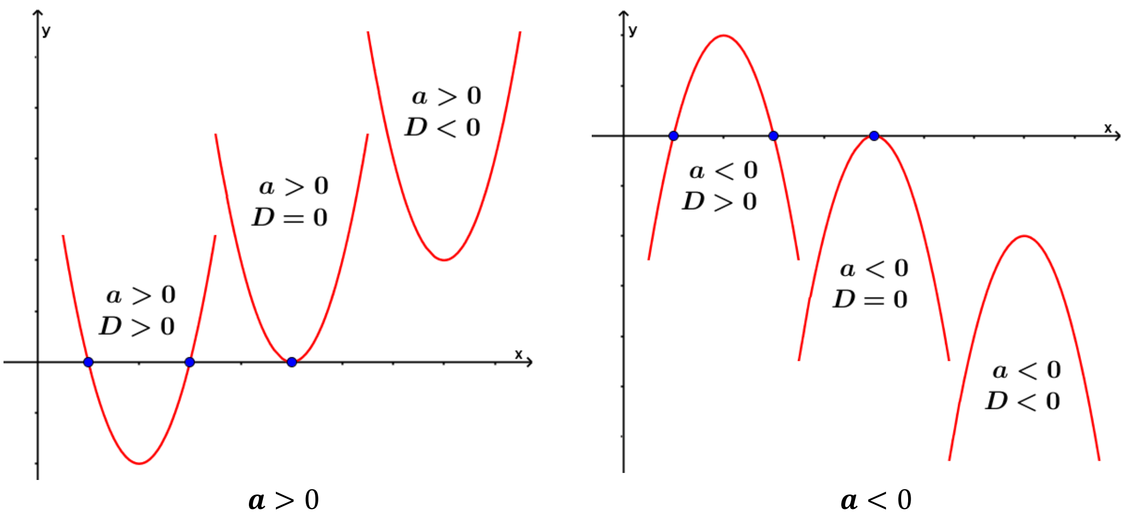
Izraz pod korijenom naziva se **diskriminanta** i označava se s $\boldsymbol{D}$ pa imamo $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$.

U ovisnosti o predznacima diskriminante i vodećeg koeficijenta razlikuju se sljedeći slučajevi:

- Ako je $\boldsymbol{D} > 0$, rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe jesu različiti realni brojevi. Kvadratni korijen iz pozitivnog je broja realan broj, a budući da su svi ostali brojevi realni, tada su x_1 i x_2 realni brojevi. U ovom slučaju kvadratna funkcija ima dvije nultočke i siječe os apscise u dvije točke x_1 i x_2.

- Ako je $\boldsymbol{D = 0}$, rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe jednaki su realni brojevi, tj. $x_1 = x_2$. U ovom slučaju kvadratna funkcija ima samo jednu nultočku i s osi apscisa ima jednu zajedničku točku.

- Ako je $\boldsymbol{D} < 0$, rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe jesu konjugirano kompleksni brojevi pa kvadratna funkcija nema zajedničkih točaka s osi apscisa (nema realnih nultočaka).



Slika 12. Grafovi kvadratne funkcije u ovisnosti o $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{a}$

Zadatak 1.

Nacrtajte graf kvadratne funkcije $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.
Odredite tjeme i ispitajte tok funkcije.
(Pojašnjenje za upis funkcije: f(x)=2x (**Alt Gr + 3**) 2-6x+4)

Rješenje:

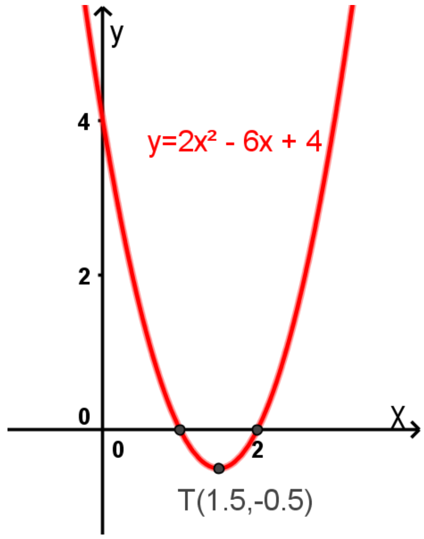
$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 4 = 12 \qquad (-1\,,12)$

$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 4 = 4 \qquad (0\,,4)$

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 4 = 0 \qquad (1\,,0)$

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 0 \qquad (2\,,0)$

$f(2) = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = 4 \qquad (3\,,4)$



Funkcija f pada na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a raste na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$.

Zadatak 2.

U programu GeoGebra nacrtajte graf kvadratne funkcije $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

a) Odredite nultočke, odsječak na y-osi i tjeme.
b) Uporabom klizača parametra a kvadratne funkcije analizirajte graf.
c) Uporabom klizača koeficijenta x_0 kvadratne funkcije analizirajte graf.
d) Uporabom klizača parametra y_0 kvadratne funkcije analizirajte graf.

Napomena:

Kako bismo odgovorili na prethodna pitanja, potrebno je kvadratnu funkciju nadopuniti do potpunog kvadrata. To možemo učiniti na papiru, ali i u sučelju GeoGebre tako što u traku za unos upisujemo naredbu:

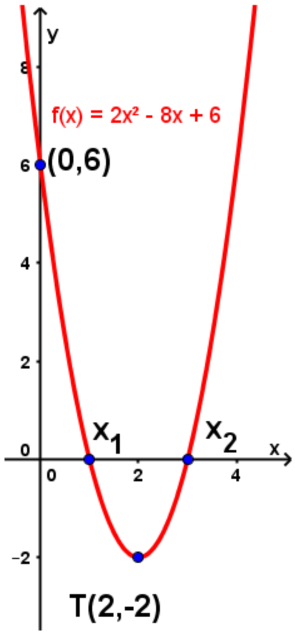
PotpuniKvadrat[2x^2-8x+6].

Funkcija nam vraća rezultat: $\mathbf{2(x-2)^2-2}$ što je traženi oblik funkcije za crtanje grafova translacijom: $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2 - y_0}$.

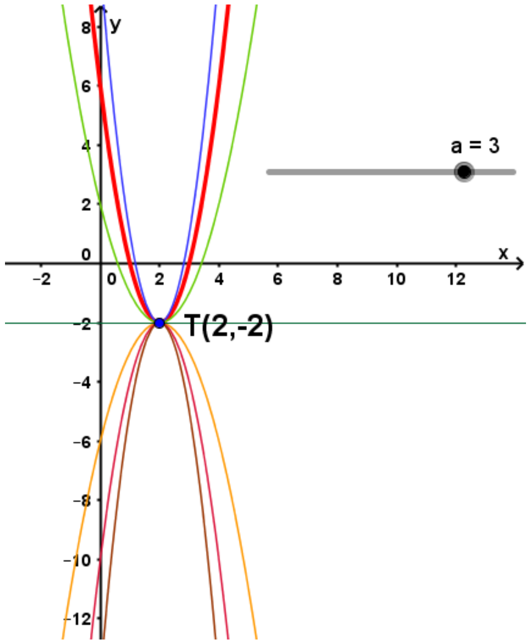
Zapisivanjem početne kvadratne funkcije u ovom obliku lako se može odgovoriti na pitanja b), c) i d).

Kao dodatak ovome zadatku za učenike zanimljivo bi im bilo postaviti pitanja uporabe klizača koeficijenata a, b i c početne kvadratne funkcije oblika
$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje se postavljeni klizač može i animirati.

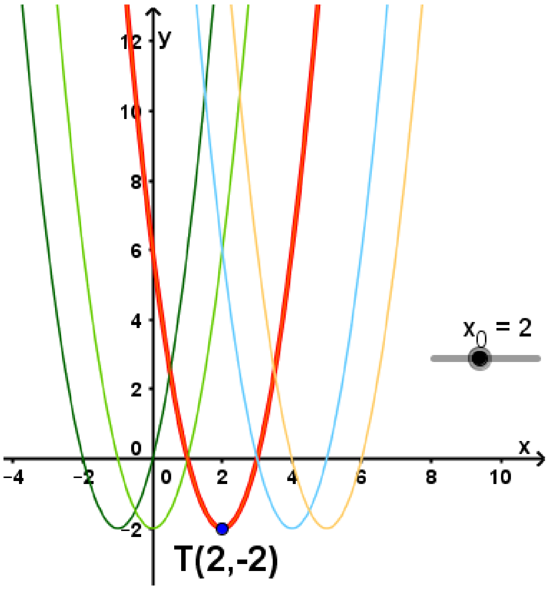
Rješenje:



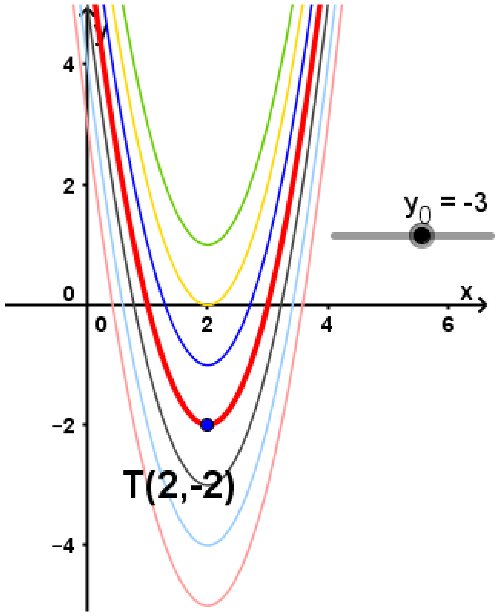
a)



b)



c)

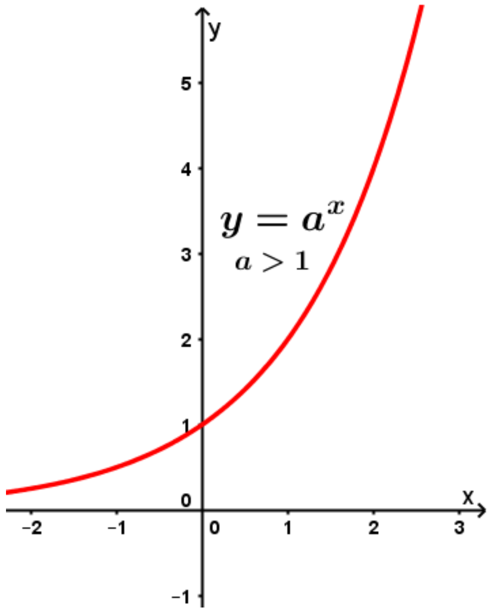


d)

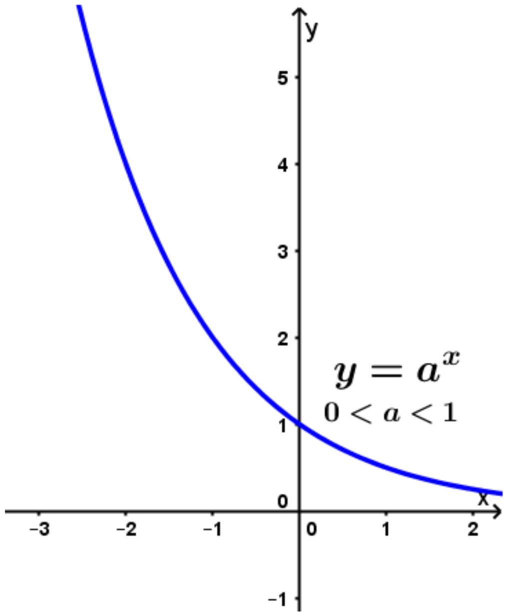
1.4. Eksponencijalna funkcija

Definicija:

Funkciju $f(x) = a^x$, gdje je x realni broj, $a \in R, a > 0$ i $a \neq 1$ nazivamo **eksponencijalna funkcija s bazom a.**



Slika 13. Rastuća eksponencijalna funkcija



Slika 14. Padajuća eksponencijalna funkcija

Domena:

Domena funkcije $f(x) = a^x$ cijeli je skup $\mathbb{R}$.

Slika (skup njezinih vrijednosti) interval je pozitivnih realnih brojeva $\langle 0, +\infty \rangle$.

Graf:

Graf eksponencijalne funkcije $y = a^x$ siječe os y u točki $(0,1)$.

Asimptote:

Asimptota grafa $y = a^x$ je os x.

Monotonost funkcije:

Zadatak 1.

Koristeći se matematičkim alatom GeoGebra nacrtajte grafove sljedećih eksponencijalnih funkcija te ispitajte monotonost nacrtanih funkcija. Koja od funkcija raste brže, a koja sporije? Koja od njih pada?

Funkcija	Rastuća (↗) ili padajuća(↘)	$f(2) =$	$f(3) =$
a) $f(x) = 3^x$	↗	**9**	**27**
b) $f(x) = 10^x$	↗	**100**	**1000**
c) $f(x) = 7^x$	↗	**49**	**343**
d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	↘	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$
e) $f(x) = 0.25^x$	↘	**0.0625**	**0.015625**
f) $f(x) = 3^{-x}$	↘	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{27}}$

Od prethodno promatranih funkcija najbrže rastuća jest funkcija: $\boldsymbol{f(x) = 10^x}$,
dok je najbrže padajuća funkcija $\boldsymbol{f(x) = 0.25^x}$.
Grafovi funkcija $f(x) = 3^x$ i $f(x) = 3^{-x}$ međusobno su osno simetrični s obzirom na **y-os**.
Općenito vrijede sljedeća svojstva eksponencijalnih funkcija:
(dopunite svojstva svojim zaključcima)
Funkcija $f(x) = a^x$ za:

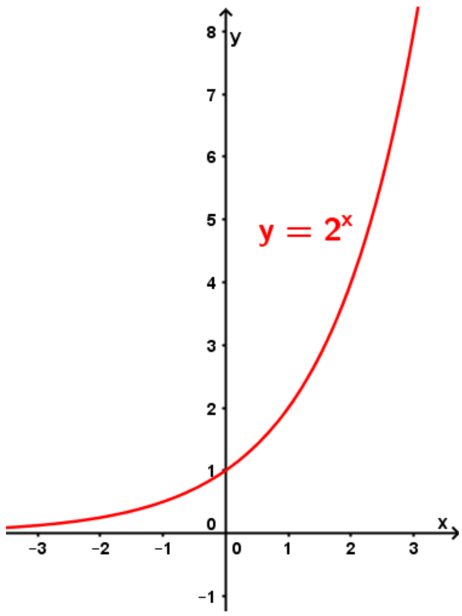
- **$a > 1$ raste, odnosno za sve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$,**
- **$0 < a < 1$ pada, odnosno za sve $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$.**

Zadatak 2.
Nacrtajte graf eksponencijalne funkcije $f(x) = 2^x$.

a) Ima li ova funkcija nultočke?
b) U kojoj točki siječe y-os?
c) Je li ova funkcija rastuća ili padajuća?

Rješenje:

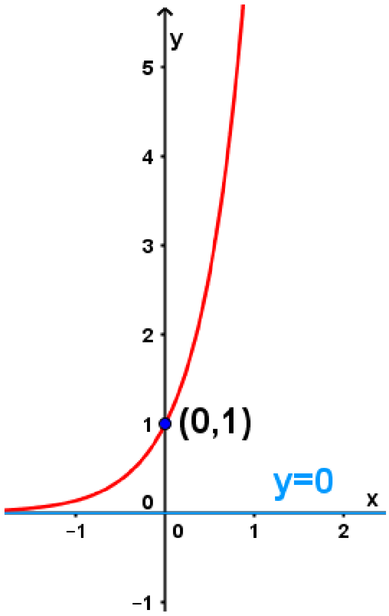
$f(-3) = 2^{-3} = 0.125$ $\quad (-3, 0.125)$
$f(-2) = 2^{-2} = 0.25$ $\quad (-2, 0.25)$
$f(-1) = 2^{-1} = 0.5$ $\quad (-1, 0.5)$
$f(0) = 2^0 = 1$ $\quad (0, 1)$
$f(1) = 2^1 = 2$ $\quad (1, 2)$
$f(2) = 2^2 = 4$ $\quad (2, 4)$
$f(3) = 2^3 = 8$ $\quad (3, 8)$



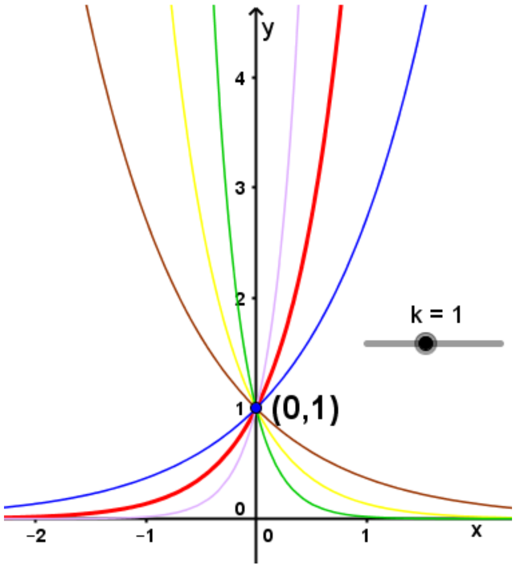
Zadatak 3.
U programu GeoGebra nacrtajte graf eksponencijalne funkcije $f(x) = e^{2x}$.
Opći oblik funkcije je $f(x) = e^{kx}$, gdje je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Odredite odsječak na y-osi i horizontalnu asimptotu funkcije $f(x) = e^{2x}$.
b) Uporabom klizača koeficijenta k eksponencijalne funkcije $f(x) = e^{kx}$ analizirajte graf.
c) Što bi se dogodilo u trenutku kada bi koeficijent k bio jednak nuli?

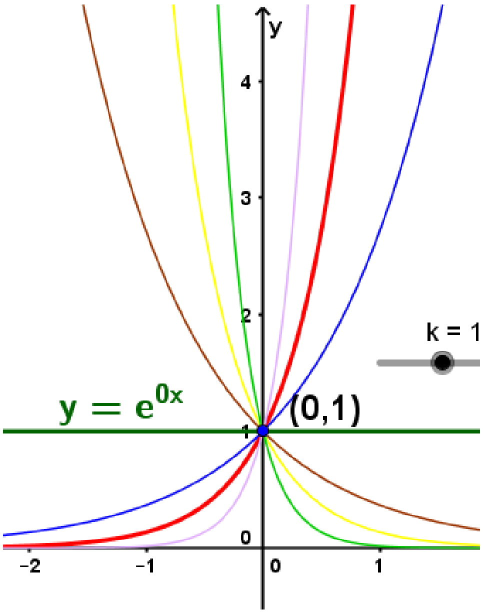
Rješenje:



a)



b)



c)

Inverzna funkcija

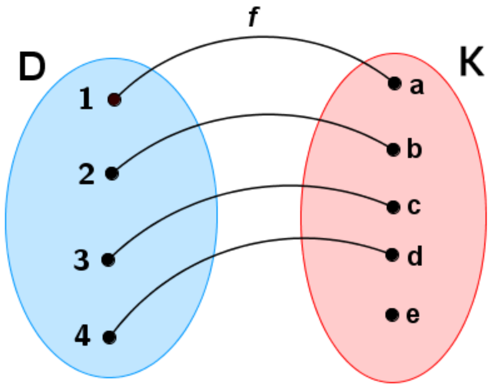
Funkciju f^{-1} koja ima svojstvo da je $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ za sve $x \in D$ zovemo **inverzna funkcija** funkcije f.

Kada funkcija f preslikava dva različita elementa domene u isti element kodomene, onda ne postoji inverzna funkcija. Ako za $x_1 \neq x_2$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2) = y$, onda ne možemo definirati inverznu funkciju za element y zato što bi istovremeno vrijedilo $f^{-1}(y) = x_1$, kao i $f^{-1}(y) = x_2$, a to je u suprotnosti s definicijom funkcije. Za funkciju f definiramo inverznu funkciju koja će svaki $y \in f(D)$ preslikati u onaj $x \in D$ za koji je $y = f(x)$ onda i samo onda ako za svaka dva $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

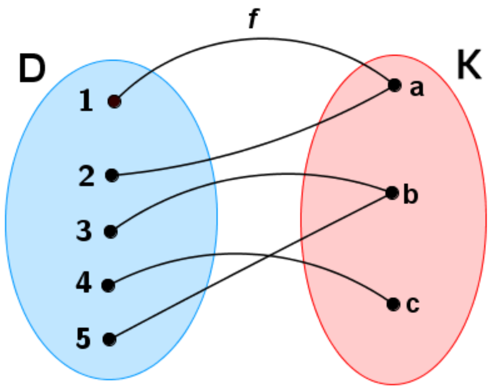
Za funkciju $f: D \to K$ kažemo da je **injekcija** ili **injektivno** preslikavanje ako za

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}.$$



Slika 15. Injektivno preslikavanje

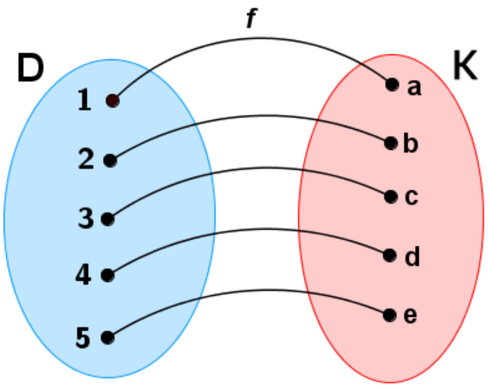
Djelovanjem inverzne funkcije f^{-1} na funkciju $f: D \to K$ uočavamo da kodomena funkcije f poprima ulogu domene funkcije f^{-1}. Funkcija f^{-1} može se definirati samo za one y za koje postoji x takav da je $f(x) = y$. Takvi se y nalaze u slici $R(f)$ funkcije f. Želimo li da inverzna funkcija bude definirana na čitavoj kodomeni funkcije f, onda f mora imati dodatno svojstvo $R(f) = K$. Ovo se svojstvo naziva **surjektivnost,** a za funkciju s tim svojstvom kaže se da je **surjekcija.**



Slika 16. Surjektivno preslikavanje

Funkcija $f: D \to K$ jest **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija. Svaka bijekcija $f: D \to K$ ima inverznu funkciju f^{-1} definiranu na K, a s vrijednostima u D:

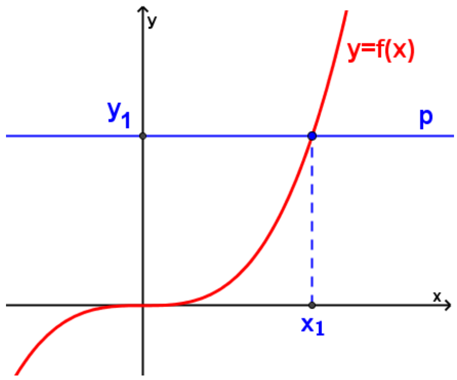
$$\boldsymbol{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \qquad \forall x \in D, \qquad \forall y \in K.}$$



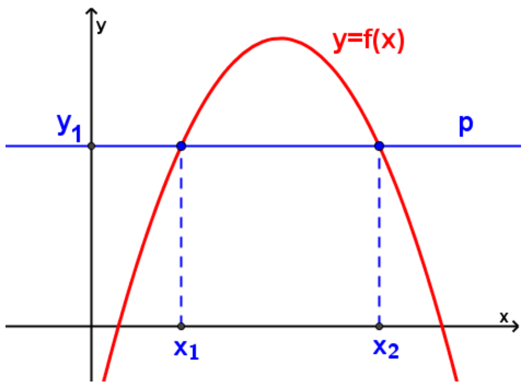
Slika 17. Bijektivno preslikavanje

Horizontalnim testom moguće je grafički utvrditi koji graf funkcije predstavlja injekciju. Ako horizontalni pravac siječe graf funkcije u najviše jednoj točki, onda je funkcija injekcija.
Ako horizontalni pravac siječe graf u dvije ili više točaka, tada se različite vrijednosti varijable x iz domene preslikavaju u isti y u kodomeni pa funkcija nije injekcija, a time ni bijekcija.

Primjer 7.
Provjerite koji od sljedećih grafova predstavljaju bijekciju ako je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
a)



Ova je funkcija injekcija. Horizontalni test pokazuje da se različiti elementi iz domene preslikavaju u različite elemente iz kodomene. Isto tako je i surjekcija jer je slika funkcije jednaka kodomeni.
Zaključujemo da je funkcija f bijekcija.
b)



Funkcija prikazana ovim grafom nije bijekcija što se vidi iz horizontalnog testa. Naime dvije vrijednosti iz domene preslikaju se u jedinstveni element iz kodomene pa funkcija nije injekcija, a time nije ni bijekcija.

Primjer 8.

Neka je $f(x) = 2x - 3$. Odredite inverznu funkciju f^{-1} iz kompozicije

$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Rješenje:

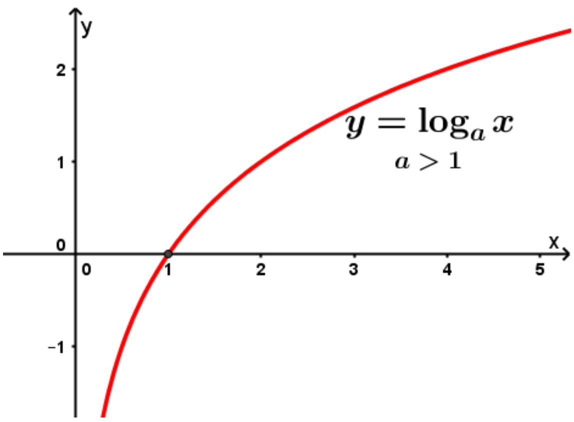
Za $\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right) = x$ dobije se $2 \cdot f^{-1}(x) - 3 = x$

$$2 \cdot f^{-1}(x) = x + 3 \quad /:2$$

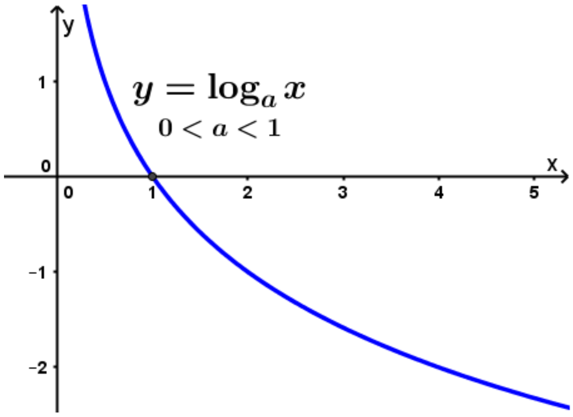
$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

1.5. Logaritamska funkcija

Definicija:
Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ **logaritmska** je **funkcija s bazom** $\boldsymbol{a}$.
Označavamo je s $\log_a(x)$ ili $\log_a x$.
Neka je $f(x) = a^{x,}$ gdje je x realni broj, $a \in \mathbb{R}, a > 0$ i $a \neq 1$, tada je $f^{-1}(x) = \log_a x$.



Slika 18. Rastuća logaritamska funkcija



Slika 19. Padajuća logaritamska funkcija

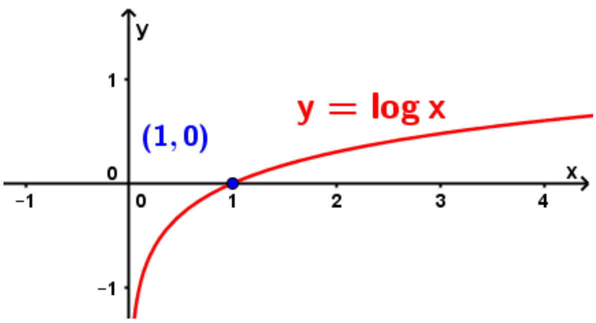
Domena:
Domena funkcije $f(x) = \log_a x$ jest skup $\langle 0, +\infty\rangle$.
Slika (skup njezinih vrijednosti) jest cijeli skup $\mathbb{R}$.
Graf:
Graf logaritamske funkcije $y = \log_a x$ siječe os x u točki $(1{,}0)$.
Asimptote:
Asimptota grafa $y = \log_a x$ je os y.

Zadatak 1.
Nacrtajte graf logaritamske funkcije $f(x) = \log x$.

a) Ima li ova funkcija nultočke?
a) Siječe li ova funkcija y-os?
b) Je li ova funkcija rastuća ili padajuća?

Rješenje:

$f(0.25) = -0.602$	$(0.25\,, -0.602)$
$f(0.5) = -0.301$	$(0.5\,, -\,0.301)$
$f(0.75) = -0.124$	$(0.75, -\,0.124)$
$f(1) = 0$	$(1\,, 0)$
$f(1.5) = 0.176$	$(1.5\,, 0.176)$
$f(2) = 0.301$	$(2\,, 0.301)$
$f(3) = 0.477$	$(3\,, 0.477)$



Zadatak 2.

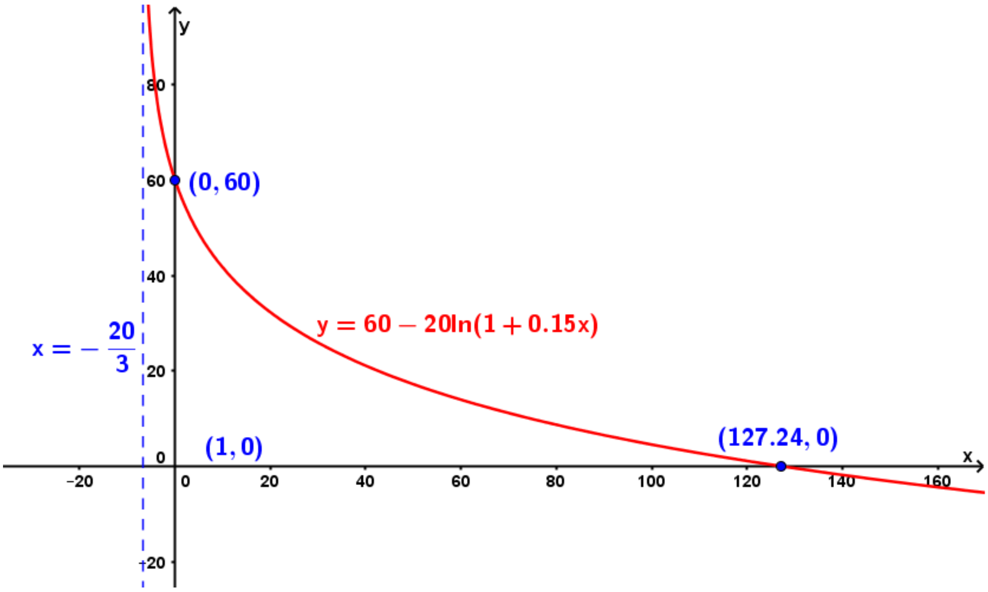
U programu GeoGebra nacrtajte graf logaritamske funkcije
$f(x) = 60 - 20\ln(1 + 0.15x)$.

a) Odredite odsječke na x-osi, y-osi i vertikalnu asimptotu.

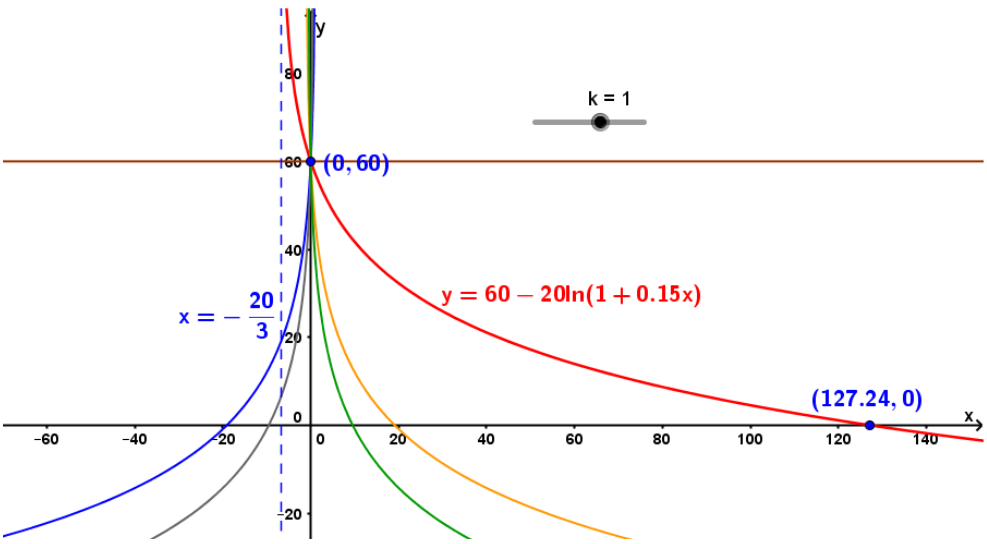
b) Uporabom klizača koeficijenta k eksponencijalne funkcije oblika
$f(x) = 60 - 20\ln(1 + kx)$ analizirajte graf. Što bi se dogodilo u trenutku kada bi koeficijent k bio jednak nuli?

c) Uporabom klizača koeficijenta p eksponencijalne funkcije oblika
$f(x) = p - 20\ln(1 + 0.15x)$ analizirajte graf.

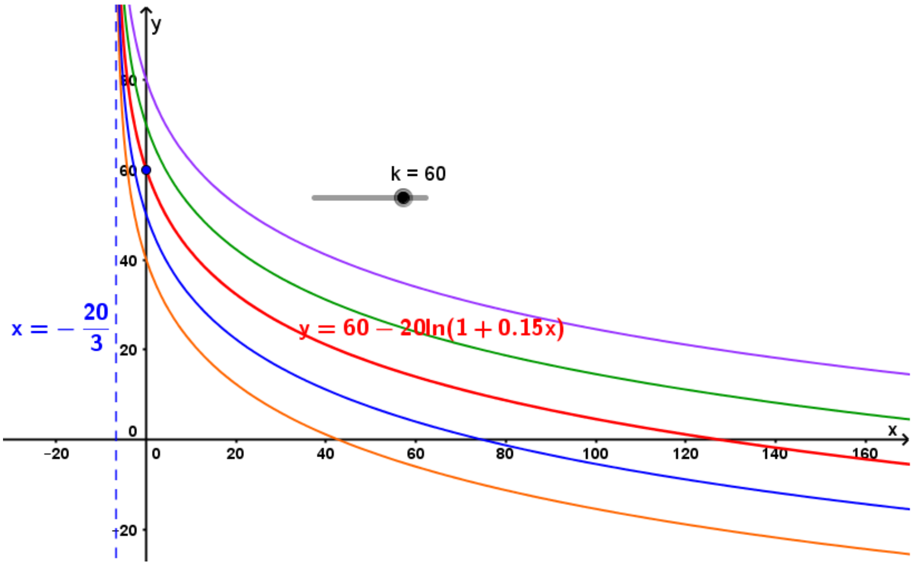
Rješenje:



a)



b)



y
80
60
40
20
0
-20
k = 60
$x = -\frac{20}{3}$
$y = 60 - 20\ln(1 + 0.15x)$
x
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160

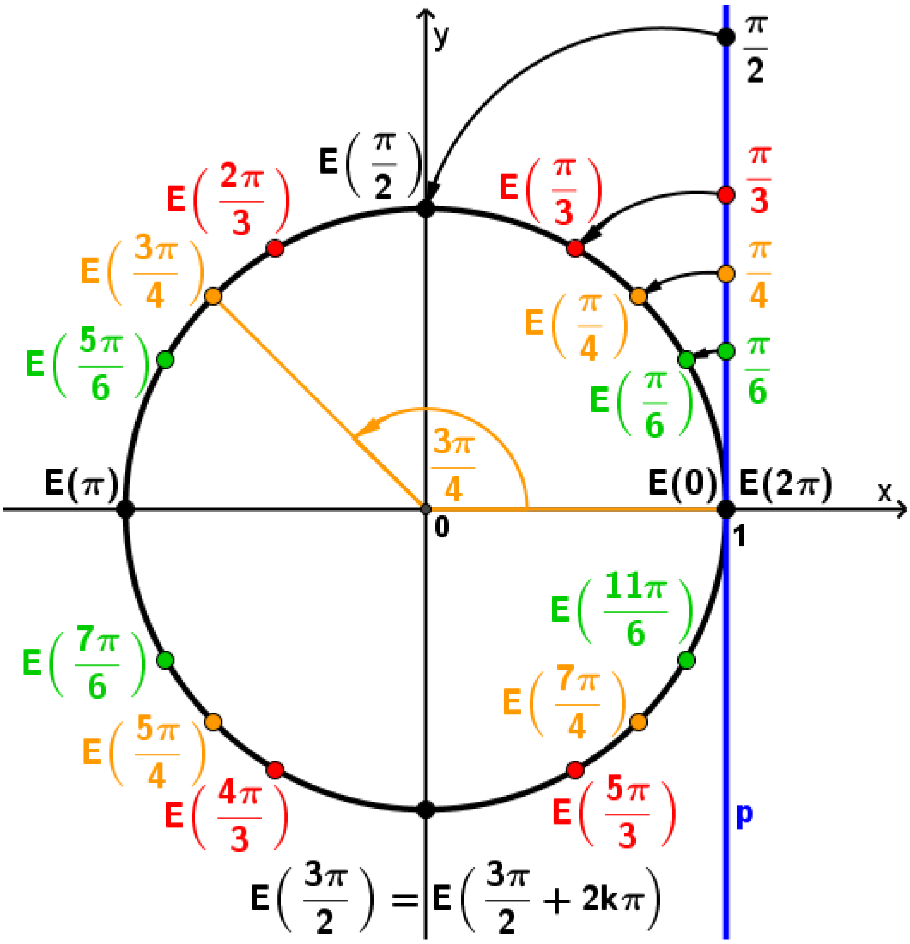
c)

1.6. Trigonometrijske funkcije

Namatanjem brojevnog pravca p na kružnicu K definirano je pridruživanje realnih brojeva točkama brojevne kružnice (prijelaz iz jednodimenzionalnog u dvodimenzionalni sustav). Ovakvo preslikavanje zovemo **eksponencijalno** preslikavanje:

$$\boldsymbol{t \in p \rightarrow E(t) \in K(0,1)}.$$

Pozitivni dio brojevnog pravca na kružnicu se namata u smjeru obrnutom od gibanja kazaljki na satu.



Slika 20. Eksponencijalno namatanje brojevnog pravca na kružnicu

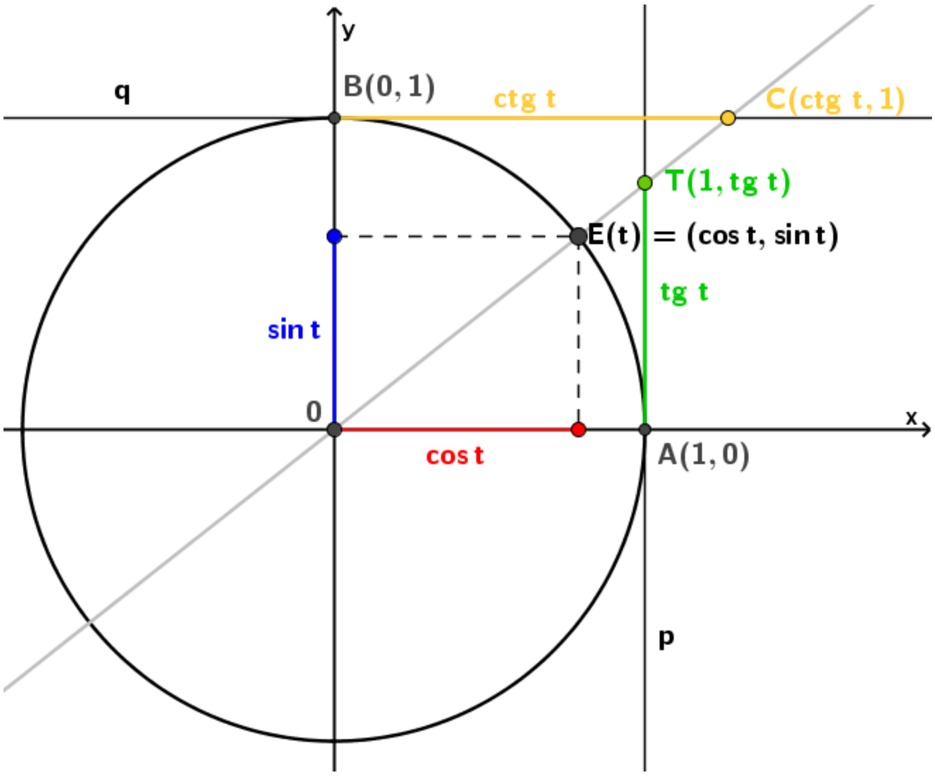
p - pravac paralelan y osi, a prolazi točkom $(1,0)$;
$K(0,1)$ - kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava polumjera 1;
kada se namatanjem dosegne broj $t = 2\pi$, dolazi se u početnu točku namatanja
(opseg kružnice $o = 2r\pi$, za $r = 1$, iznosi 2π) pa u svakom sljedećem namotaju vrijedi:

$$\boldsymbol{E(0) = E(2\pi) = E(4\pi) = \cdots = E(2k\pi).}$$

U svaku točku kružnice preslika se beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca zato što vrijedi

$$\boldsymbol{E(t) = E(t + 2k\pi).}$$

Definicije trigonometrijskih funkcija



Slika 21. Definicije trigonometrijskih funkcija

Apscisa točke $E(t)$ zove se **kosinus** broja t i označava se $\cos t$; na taj je način definirana funkcija **cos** : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{t \to \cos t}$.

Ordinata točke $E(t)$ zove se **sinus** broja t i označava se $\sin t$; na taj je način definirana funkcija **sin:** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{t \to \sin t}$.

Ordinata točke T (presjek osi tangensa povučene točkom $A(1,0)$ i pravca kroz ishodište i točku $E(t)$) zove se **tangens** broja t (onaj koji dira, označava odsječak tangente).

Apscisa točke C (presjek osi kotangensa povučene točkom $B(0,1)$ i pravca kroz ishodište i točku $E(t)$) zove se **kotangens** broja t.

Primjer 9.

Pomoću istaknutih točaka na trigonometrijskoj kružnici uočavamo vrijednosti trigonometrijskih funkcija za:

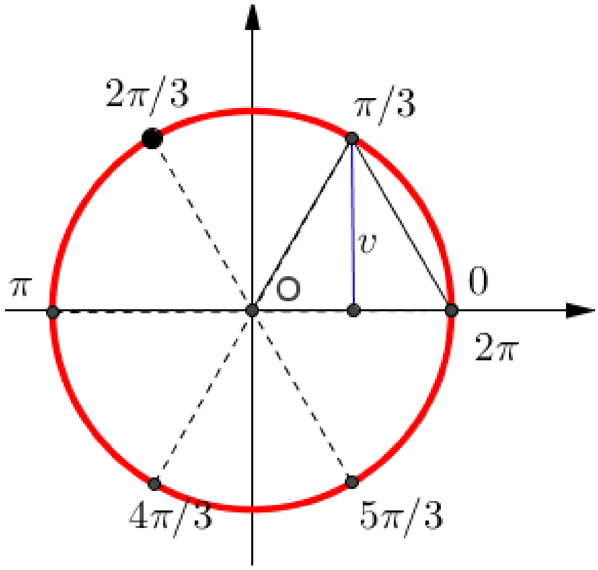
$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

Točka	Kosinus	Sinus
$A(1,0) = E(\cos 0, \sin 0)$	$\cos 0 = 1$	$\sin 0 = 0$
$B(0,1) = E(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2})$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
$C(-1,0) = E(\cos\pi, \sin\pi)$	$\cos\pi = -1$	$\sin\pi = 0$
$D(0,-1) = E(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2})$	$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija koje se ne mogu lako očitati na kružnici, određuju se geometrijskim metodama i korištenjem kalkulatora.

Zadatak 1.

Nacrtajte trigonometrijsku kružnicu i podijelite je točkama na šest jednakih lukova polazeći od 0. Izračunajte vrijednosti trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus.



Rješenje:

$$\sin 60° = \frac{v}{1} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

Pomoću trigonometrijske kružnice lako se odrede ostale vrijednosti:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

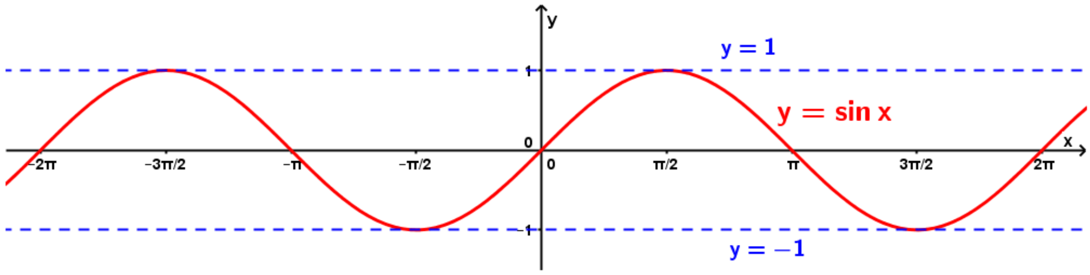
$$\cos\frac{5\pi}{3} = -\cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Grafovi trigonometrijskih funkcija

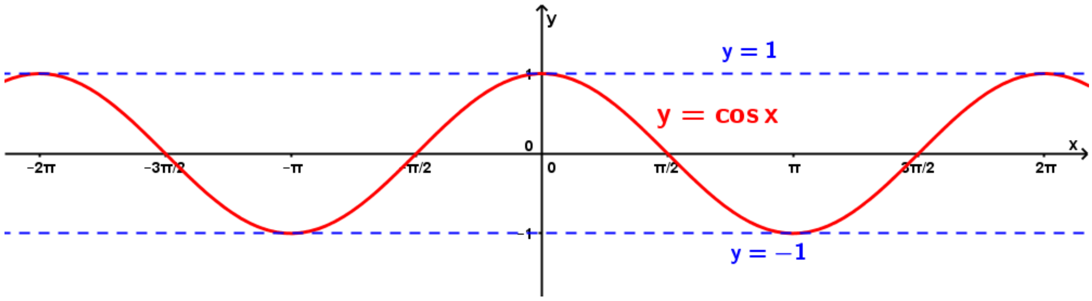
Zadatak 2.

Nacrtajte grafove trigonometrijskih funkcija:

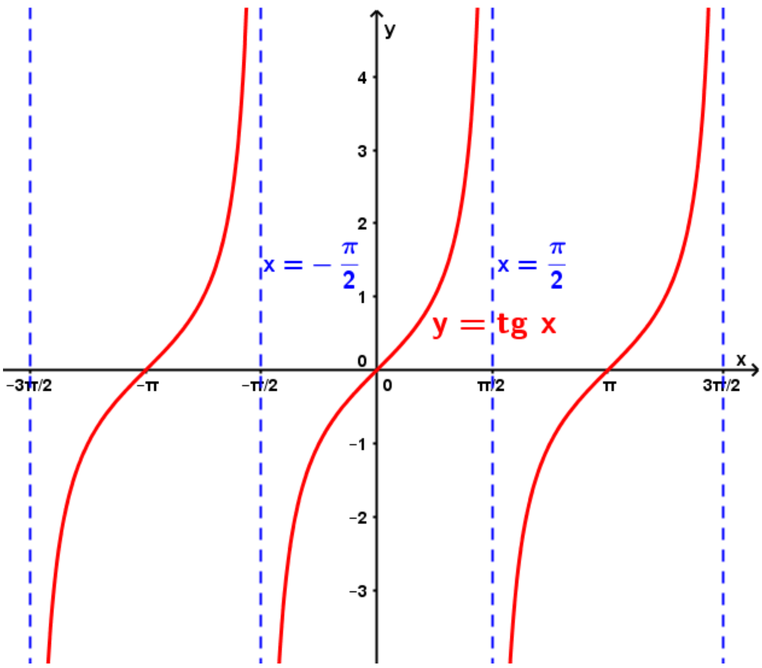
a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $\operatorname{tg} x$ d) $\operatorname{ctg} x$



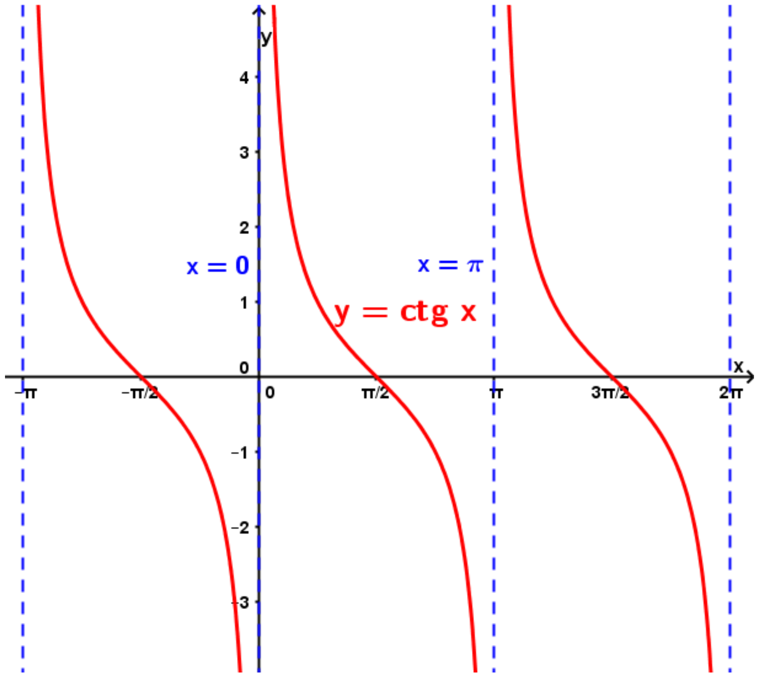
a) Graf funkcije sinus naziva se sinusoida



b) Graf funkcije kosinus naziva se kosinusoida



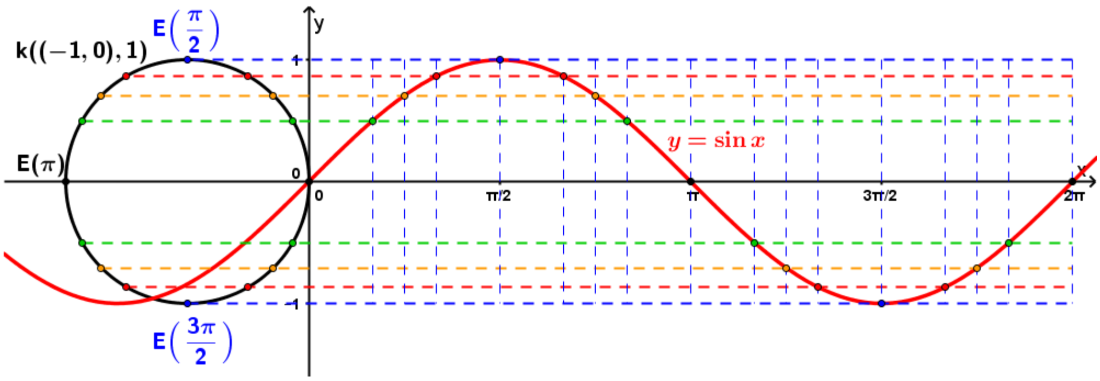
c) Graf funkcije tangens naziva se tangensoida

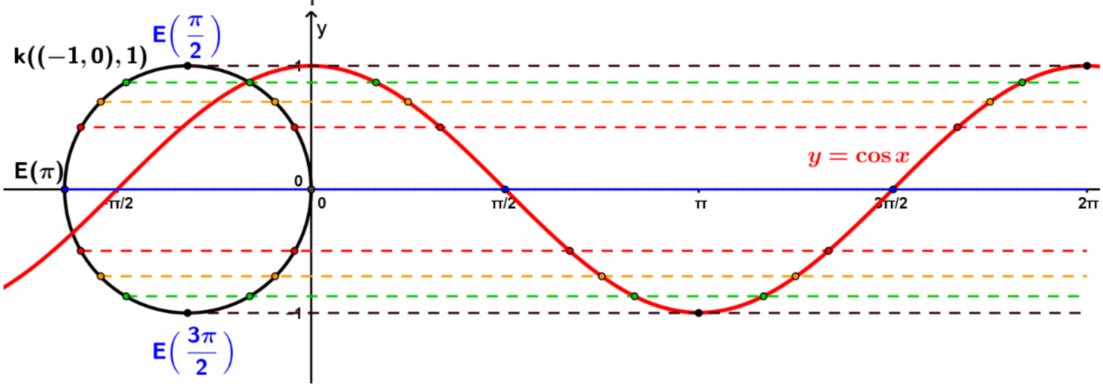


d) Graf funkcije kotangens naziva se kotangensoida

Zadatak 3. (projektni zadatak)
Nacrtajte graf funkcija sinus i kosinus pomoću trigonometrijske kružnice.

Rješenje:





2. PRIMJENE OSNOVNIH MATEMATIČKIH FUNKCIJA U PROGRAMU GEOGEBRA

2.1. Uvod

Funkcije kao važan matematički koncept uče se i poučavaju usvajanjem matematičke terminologije, uočavanjem i povezivanjem zakonitosti u njihovim svojstvima te crtanjem i analiziranjem grafova. Usvajanjem funkcija samo na teorijskoj razini ne koriste se sve mogućnosti koji taj koncept nudi. Primijenjene na primjerima i problemima koji se javljaju u drugim znanostima i svijetu koji nas okružuje, pokazuje se njihova praktična vrijednost kao i većine matematičkih koncepata izgrađenih za potrebe rješavanja životnih problema. Nezamjenjiv su alat u modeliranju problema porasta stanovništva, financijskim kretanjima temeljenim na promjenama kamatnih stopa, određivanju različitih intenziteta ili predočavanju jačine potresa.

Fundamentalne sile koje pokreću sva međudjelovanja u svemiru: gravitacijska koja određuje međudjelovanje masa, elektromagnetska koja određuje međudjelovanje naboja te slaba i jaka sila koje kontroliraju međudjelovanje čestica unutar atomske jezgre te uzrokuju nuklearne raspade i radioaktivno zračenje modeliraju se odgovarajućim matematičkim funkcijama. Analiziranje prostiranja valova, opisivanje harmonijskih oscilacija kao periodičnog gibanja, predstavljanje naizmjenične struje nemoguće je bez primjene trigonometrijskih funkcija, a logaritamskom i eksponencijalnom funkcijom modeliraju se međudjelovanja čestica na molekularnoj razini. Primjenom logaritamske i eksponencijalne funkcije opisuju se procesi razmnožavanja i rasta živih organizama, ali i procesi stanične smrti. Eksponencijalnom funkcijom modeliramo problematiku prirasta ili migracije stanovništva, a linearnom funkcijom rast resursa za ljudsko preživljavanje. Važan čimbenik u ukupnoj održivosti stanovništva i gospodarskih djelatnosti jesu prirodne katastrofe, a potresi su među najopasnijima. Ne može ih se dovoljno rano predvidjeti, ali im se intenzitet može modelirati logaritamskom funkcijom.

2.2. Linearna funkcija i njena primjena

Gibanje:

- osnovno svojstvo materije;
- promjena položaja jednog tijela u odnosu prema nekom drugom tijelu tijekom vremena;
- prikazuje se: tablično, grafički i algebarski;
- srednja brzina gibanja:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$\Delta s = s_2 - s_2$ je interval puta koji tijelo prijeđe u vremenskom intervalu

$$\Delta t = t_2 - t_2 \, .$$

Jednoliko pravocrtno gibanje

- ako je kvocijent

$$\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

stalan za svaki Δs i odgovarajući Δt duž nekog puta s, tada se tijelo na tom putu giba jednoliko te vrijedi

$$v = \frac{s}{t}\,, \qquad s = vt.$$

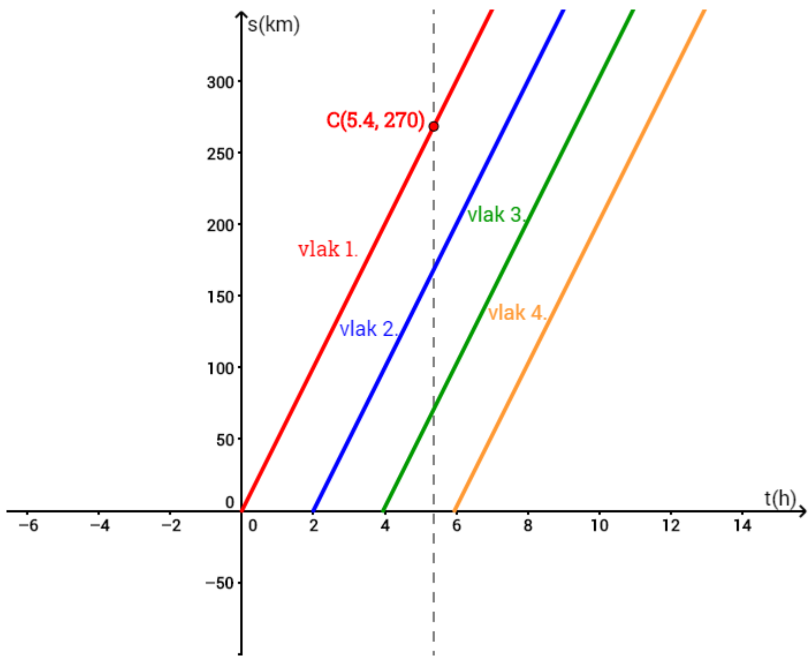
Zadatak 1.

Iz Osijeka u Zagreb svakih 2 sata kreće vlak srednjom brzinom 50 km/h. Udaljenost je od Osijeka do Zagreba 270 km.

a) Prikažite grafički ovisnost puta o vremenu za 4 vlaka.
b) Kolika bi morala biti brzina trećeg vlaka da u Zagreb stigne istodobno s prvim?

Rješenje:

a) $\Delta t = \dfrac{\Delta s}{v} = \dfrac{270}{50} = 5.4\,\text{h}$



b) $\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{270}{5.4 - 4} = \frac{270}{1.4} = 192.86$ km/h.

Zadatak 2.

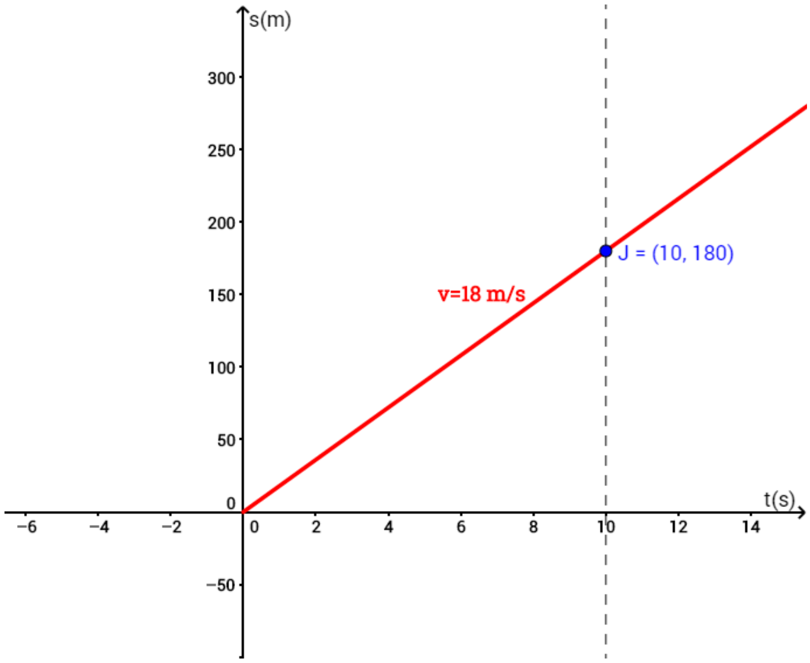
Autobus se giba srednjom brzinom 18 m/s.

a) Prikažite grafički put autobusa za 10 s.

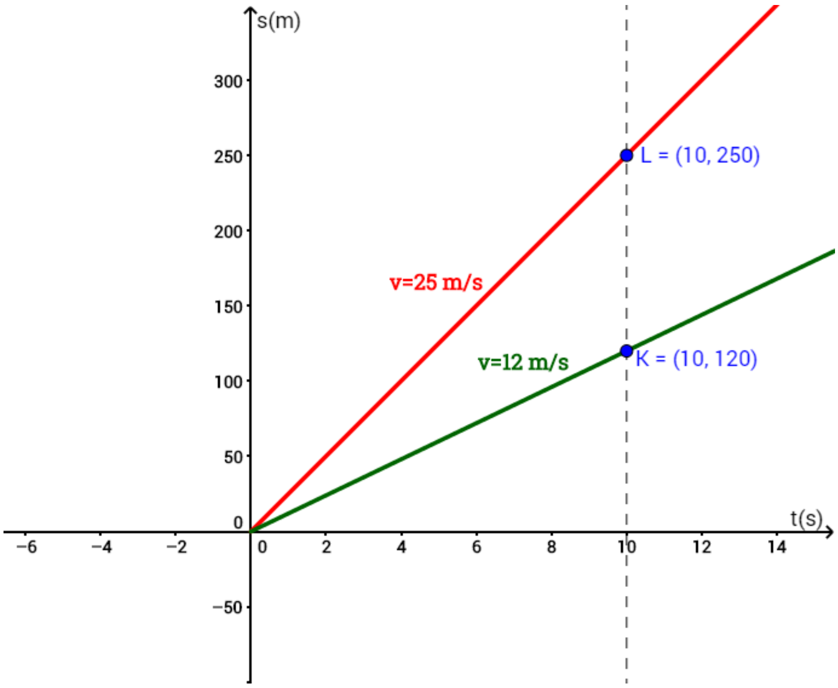
b) Prikažite isti put ako se autobus giba brzinom $v_1 = 25$ m/s i brzinom $v_2 = 12$ m/s.

Rješenje:

a) $s = v \cdot t = 18 \cdot 10 = 180$ m



b) $s_1 = v \cdot t = 25 \cdot 10 = 250$ m $\qquad s_2 = v \cdot t = 12 \cdot 10 = 120$ m



Projektni zadatak:

Udaljenost od mjesta A do mjesta B iznosi 225 km. Istodobno iz oba mjesta kreće po jedan kamion i to iz mjesta A brzinom 80 km/h, a iz mjesta B brzinom 100 km/h.

Nacrtajte ovisnost puta o vremenu za svaki kamion i odredite grafički i računski mjesto njihovog susreta.

Rješenje:

$v_A = 80$ km/h

$v_B = 100$ km/h

$$s = s_A + s_B$$

$$t_A = \frac{s_A}{v_A} = \frac{225}{80} = 2{,}8125 \text{ h}$$

$$t_B = \frac{s_B}{v_B} = \frac{225}{100} = 2{,}25 \text{ h}$$

$$t'_A = t'_B$$

$$\frac{s_A}{v_A} = \frac{s_B}{v_B}$$

$$v_A \cdot s_B = v_B \cdot s_A$$

Uvrstimo poznate vrijednosti:

$$80 \cdot s_B = 100 \cdot (225 - s_B)$$

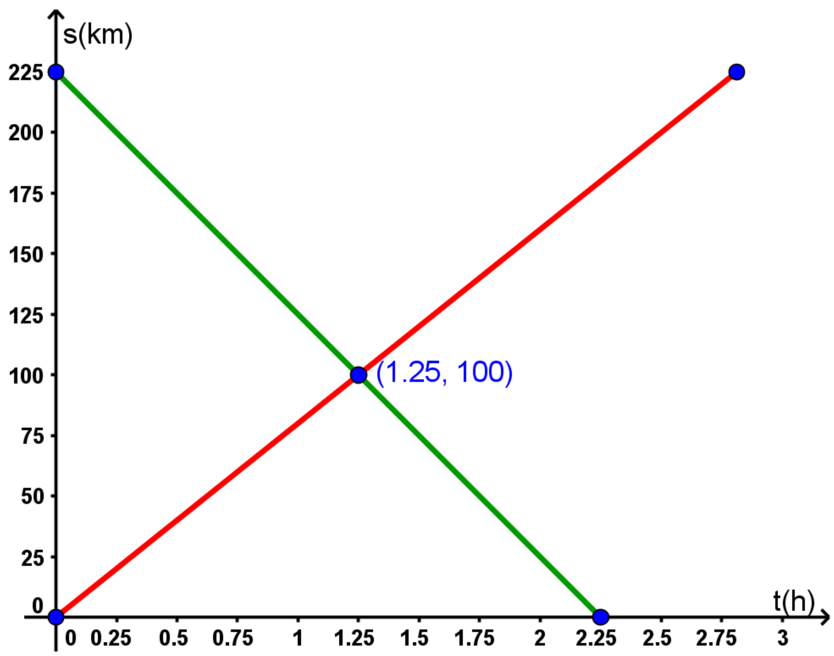
$$80 \cdot s_B = 22500 - 100 s_B$$

$$180 s_B = 22500$$

$$s_B = 125 \text{ km}$$

$$s_A = 225 - 125 = 100 \text{ km}$$

$$t'_A = t'_B = \frac{s_B}{v_B} = \frac{125}{100} = 1.25 \text{ h}$$



Jednoliko ubrzano gibanje

- Gibanje sa stalnim ubrzanjem duž pravca gibanja:

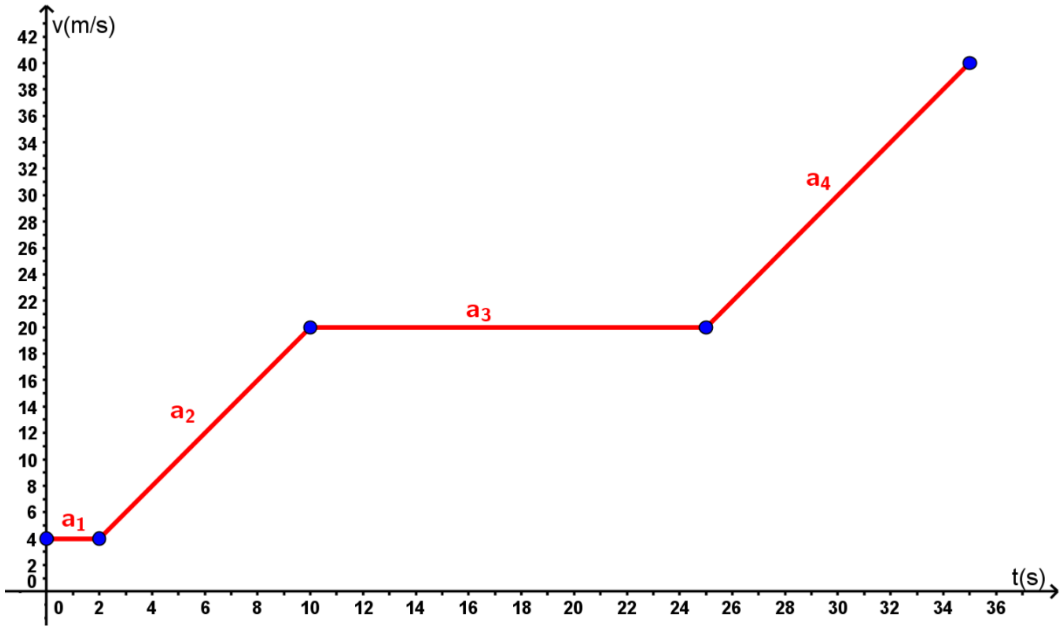
$$a = \frac{v}{t}\ ,\ v = at.$$

Zadatak 3.

Automobil se giba brzinom 4 m/s dvije sekunde, počinje ubrzavati te nakon 8 sekundi ubrzavanja njegova se brzina poveća na 20 m/s. Nakon toga se giba jednoliko tom brzinom 15 s. Ponovno počinje ubrzavati i za 10 s ubrzavanja brzina dostigne 40 m/s.

Nacrtajte *v-t* dijagram tog gibanja. Izračunajte ubrzavanja za pojedina vremenska razdoblja.

Rješenje:



$$a_1 = 0\ \text{m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{20-4}{10-2} = \frac{16}{8} = 2\ \text{m/s}^2$$

$$a_3 = 0\ \text{m/s}^2$$

$$a_4 = \frac{40-20}{35-25} = \frac{20}{10} = 2\ \text{m/s}^2$$

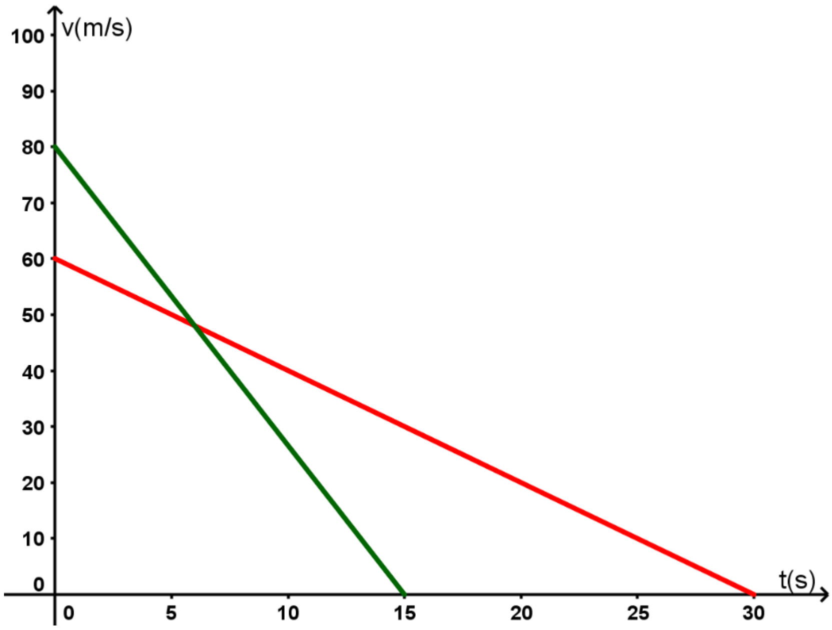
Zadatak 4.

Vozač autobusa koji vozi 80 km/h počinje kočiti, jednoliko usporavati vožnju i zaustavlja se za 15 s. Drugi vozač koji vozi brzinom 60 km/h slabije pritišće kočnice i zaustavi se za 30 s.

a) Prikažite grafički u istom koordinatnom sustavu vezu između brzine i vremena za oba autobusa.
b) Odredite pomoću grafa koji će autobus prijeći manji put za vrijeme usporavanja.
c) Dodajte grafu pravac koji prikazuje kako drugi autobus usporava vožnju jednakom akceleracijom kao i prvi. Koliko će dugo trajati to usporavanje?

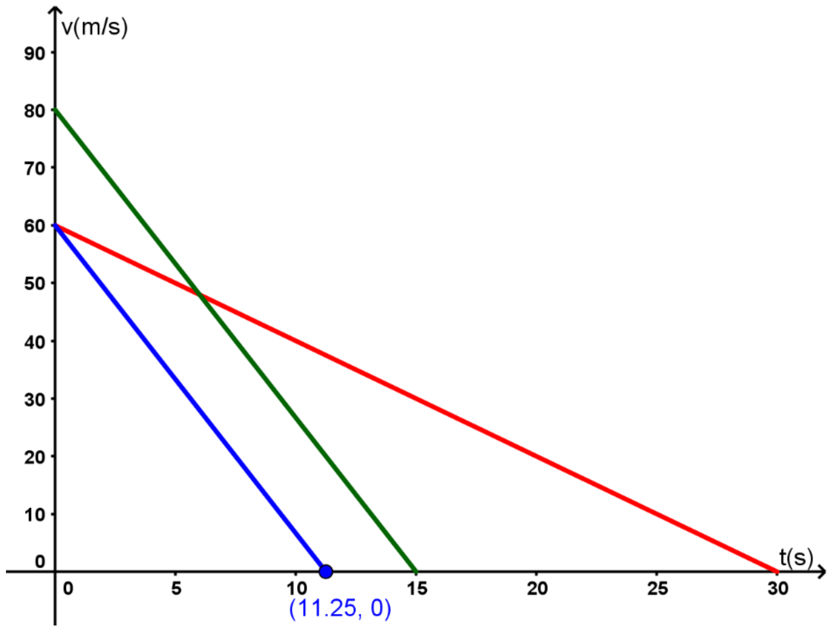
Rješenje:

a)



b) $s_1 < s_2$

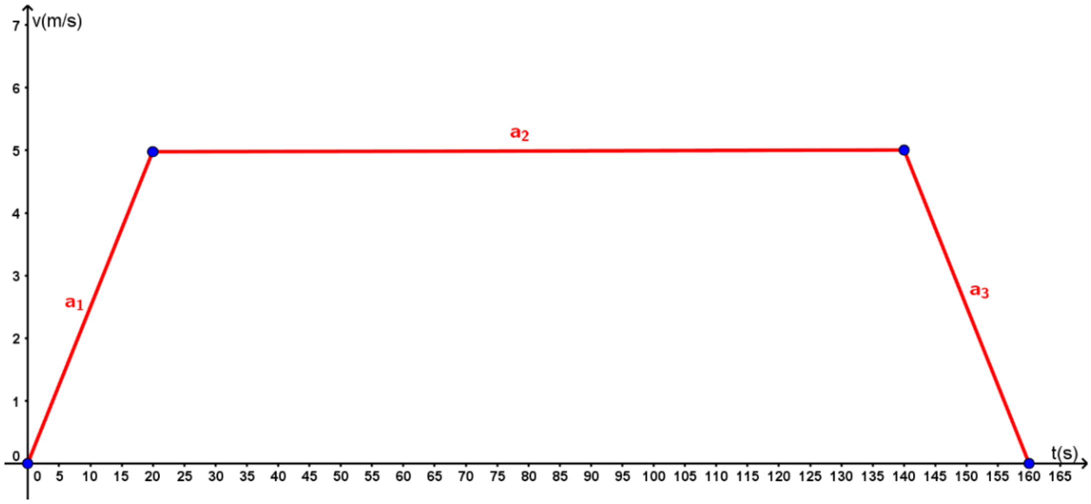
c)



Projektni zadatak:

Trkač postigne brzinu 5 m/s za 20 s. Tom brzinom trči dvije minute i zaustavlja se nakon 20 s. Grafički prikažite to gibanje, odredite ubrzanje i put.

Rješenje:



$$a_1 = \frac{5-0}{20-0} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0.25 \ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_2 = 0 \ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_3 = \frac{0-5}{165-140} = \frac{-5}{20} = \frac{-1}{4} = -0.25 \ \mathrm{m/s^2}$$

Izračunavanjem površine ispod grafa funkcije dobije se put.

$$s = \frac{20\cdot 5}{2} + 120\cdot 5 + \frac{20\cdot 5}{2} = 700 \text{ m}$$

Plinski zakoni

- Stanje plina opisujemo veličinama: temperaturom *T*, tlakom *p* i obujmom *V*.
- **Kvocijent obujma plina i termodinamičke temperature uz stalan je tlak stalan.**

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

- **Kvocijent tlaka i termodinamičke temperature uz stalan je obujam stalan.**

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

- **Umnožak obujma plina i tlaka plina uz stalnu temperaturu jest stalan.**

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Zadatak 5.

Pri stalnom tlaku 10^5 Pa plin volumena 10 litara ima temperaturu 35 °C.

Izračunajte koliku će temperaturu imati plin ako mu volumen udvostručimo i smanjimo na $\frac{1}{5}$ sadašnjeg volumena. Prikažite grafičku ovisnost volumena i temperature pri ovoj promjeni stanja plina.

Rješenje:

$p = 10^5$ Pa

$V_1 = 10$ L

$T_1 = 35$ °C

$V_2 = 2V_1 = 20$ L

$V_3 = \frac{1}{5}V_1 = 2$ L

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

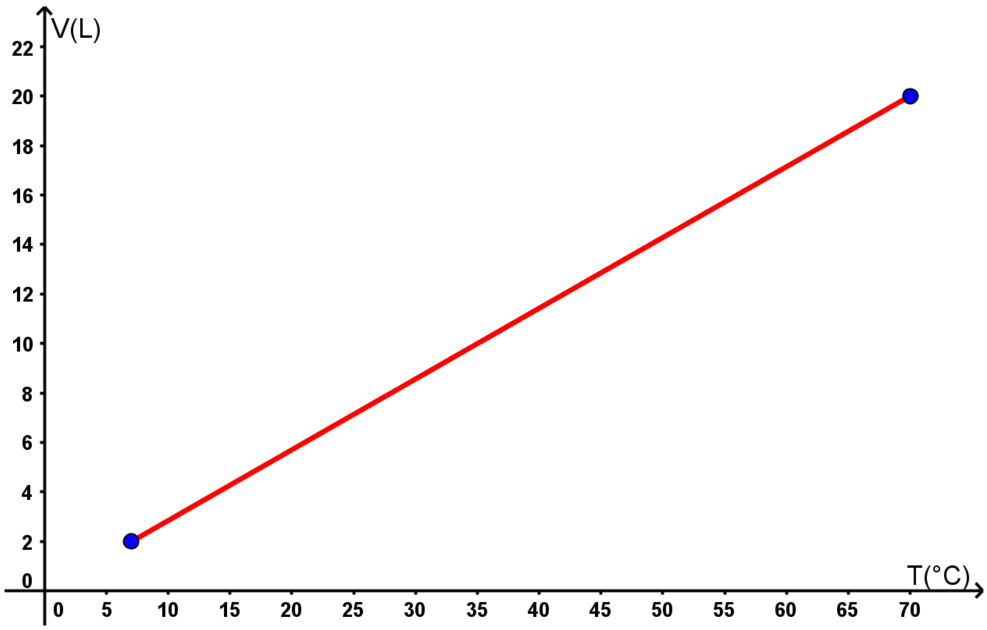
$$\frac{10}{35} = \frac{20}{T_2}$$

$$T_2 = 70 \text{ °C}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_3}$$

$$\frac{10}{35} = \frac{2}{T_3}$$

$$T_3 = 7 \text{ °C}$$



Zadatak 6.

Određena količina zraka zatvorena je u volumen koji se ne mijenja. Popunite tablicu i nacrtajte graf.

p/bar	1.5	3	6	12
T/K	**450**	900	**1800**	**3600**

Rješenje:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$\frac{3}{900} = \frac{1.5}{T_1}$$

$$3T_1 = 135$$

$$T_1 = 450$$

$$\frac{3}{900} = \frac{6}{T_2}$$

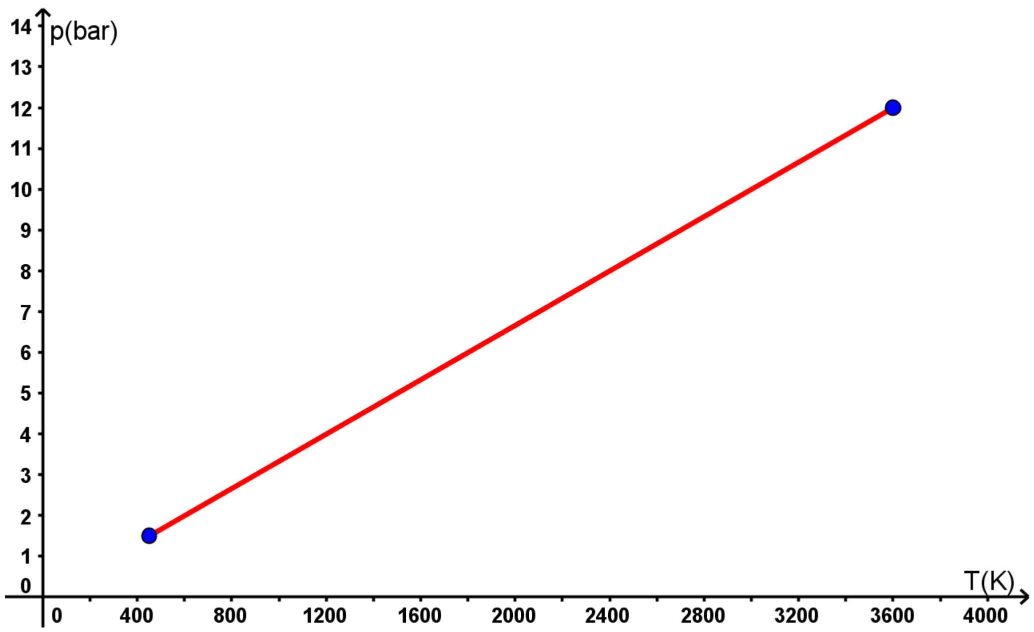
$$3T_2 = 5400$$

$$T_2 = 1800$$

$$\frac{3}{900} = \frac{12}{T_3}$$

$$3T_3 = 10800$$

$$T_1 = 3600$$



Zadatak 7.

Volumen plina mijenja se tako da tlak ostaje isti. Popunite tablicu i nacrtajte graf.

V/cm^3	5	**6,67**	**10**	15
T/K	150	200	300	**450**

Rješenje:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\frac{5}{150} = \frac{V_1}{200}$$

$$150V_1 = 1000$$

$$V_1 = 6.67$$

$$\frac{5}{150} = \frac{V_2}{300}$$

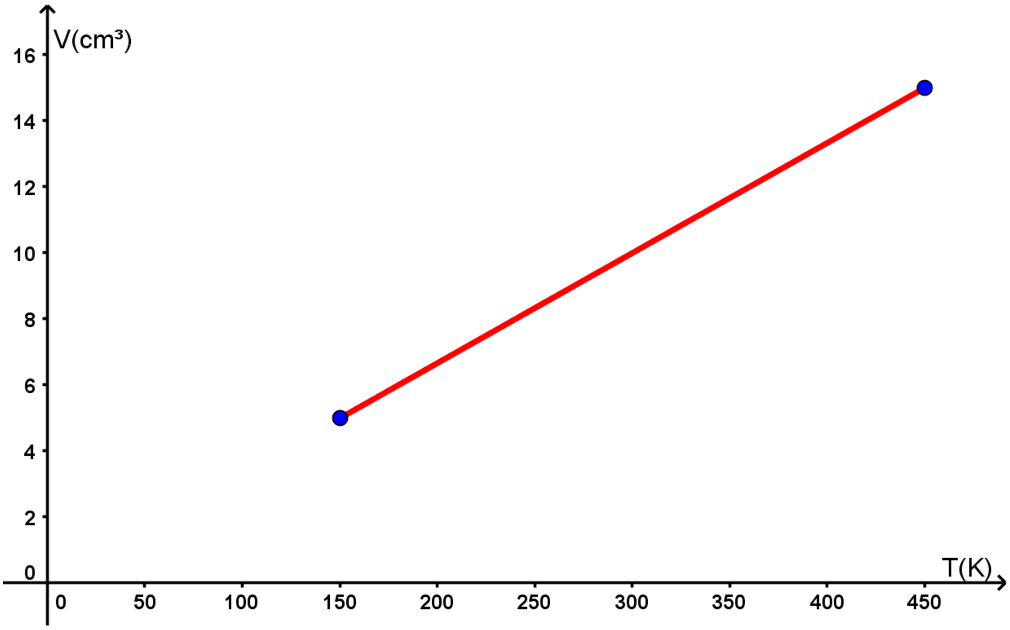
$$150V_2 = 1500$$

$$V_2 = 10$$

$$\frac{5}{150} = \frac{15}{T_3}$$

$$5T_3 = 2250$$

$$T_3 = 450$$



Rad, snaga i energija

- Kada je tijelo u stalnom međudjelovanju u smjeru puta, umnožak iznosa sile i puta koje tijelo prijeđe nazivamo radom.

$$W = F \cdot s$$

- Rad je jednak promjeni energije.

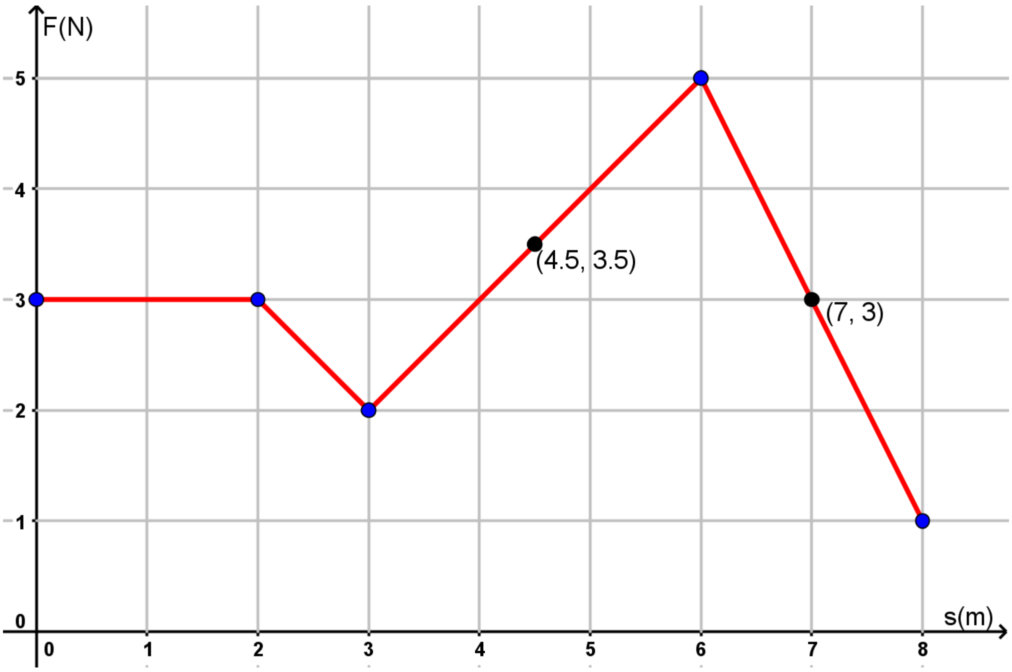
$$W = \Delta E$$

Zadatak 8.

Tijelo mase 5 kg kreće se po putu s pod utjecajem sile *F*. Tijelo prva dva metra ima silu od 3 N, sljedeći metar sila se smanjuje za 1 N, sljedeća 3 m sila dostiže vrijednost od 5 N i zatim za sljedeća 2 m tijelu se sila smanjuje na 1 N.

Prikažite *F*-*s* grafički prikaz gibanja tijela i pomoću njega odredite koliki je rad izvršila sila nakon što je tijelo prešlo put od 4,5 i 7 m.

Rješenje:



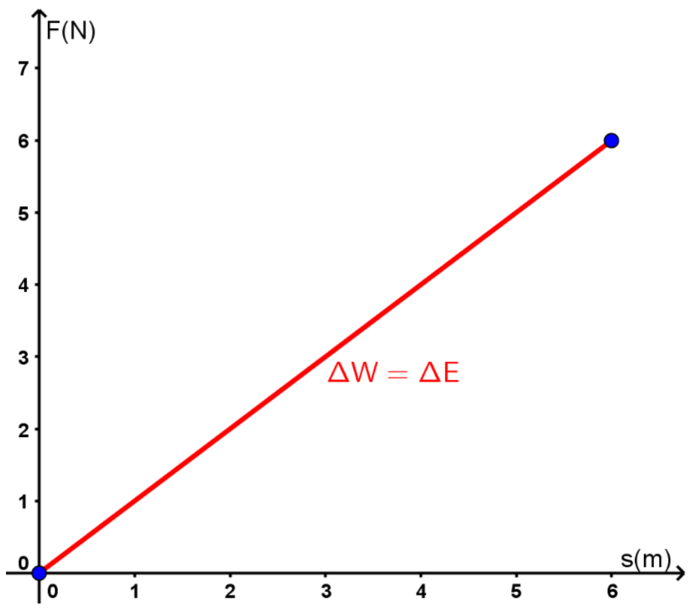
Iz grafikona slijedi:

$$W_1 = 9 + 2 + 0.5 + \frac{1.5 \cdot 1.5}{2} = 12.63\,\mathrm{J} \qquad W_2 = 14 + 2.5 + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} + 2 = 23\,\mathrm{J}$$

Zadatak 9.

Tijelo mase 3 kg giba se duž puta zbog sile koja se jednoliko povećava svaka 3 metra za 3 N. Odredite pomoću grafičkog prikaza koliku je energiju izgubilo tijelo nakon što je prešlo put od 6 m ako je sila na početku gibanja jednaka nuli.

Rješenje:



$$\Delta E = \Delta W = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\,\mathrm{J}$$

2.3. Kvadratna funkcija i njena primjena

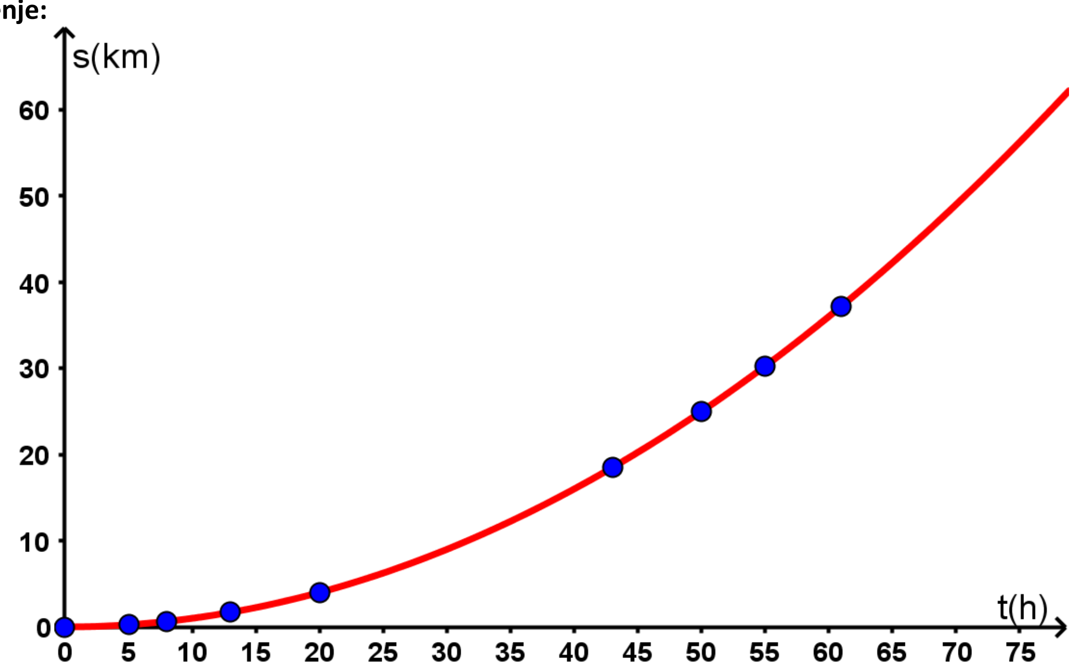
Jednoliko ubrzano gibanje

Zadatak 1.

Nacrtajte *s*-*t* grafički prikaz prema podacima iz tablice:

s (km)	0	0.25	0.64	1.69	4	18.49	25	30.25	37.21
t (h)	0	5	8	13	20	43	50	55	61

Rješenje:



Zadatak 2.

Tijelo se giba jednoliko ubrzano po pravcu akceleracijom $3\ \mathrm{m/s^2}$.

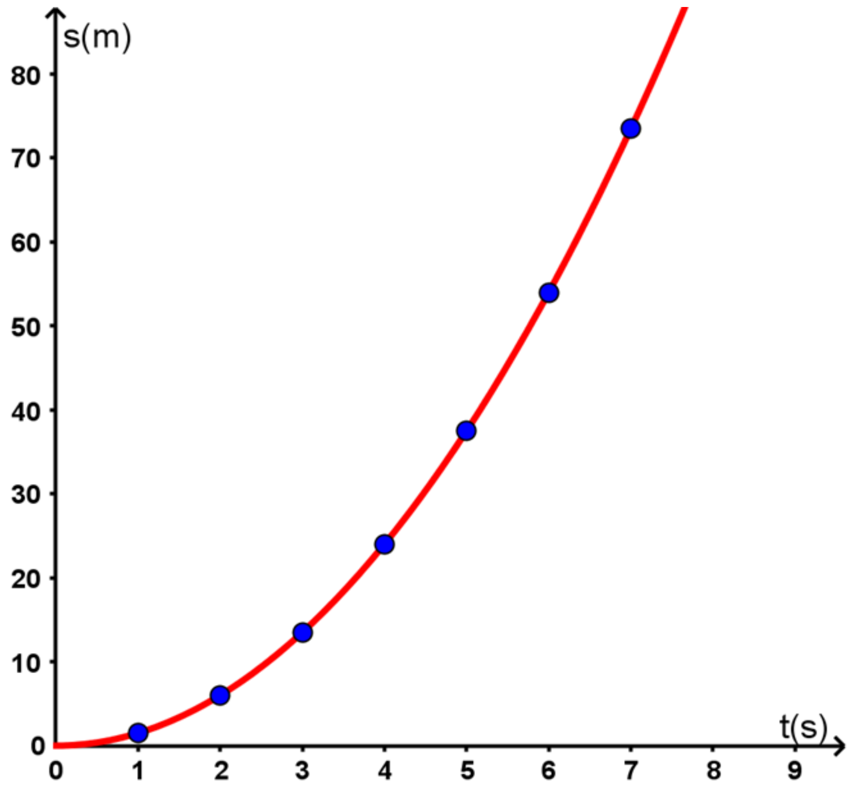
Pomoću izraza

$$s = \frac{at^2}{2}$$

nacrtajte grafički prikaz ovisnosti puta o vremenu za prvih 7 sekundi.

Rješenje:

t (s)	1	2	3	4	5	6	7
s (m)	1.5	6	13.5	24	37.5	54	73.5



Hitci

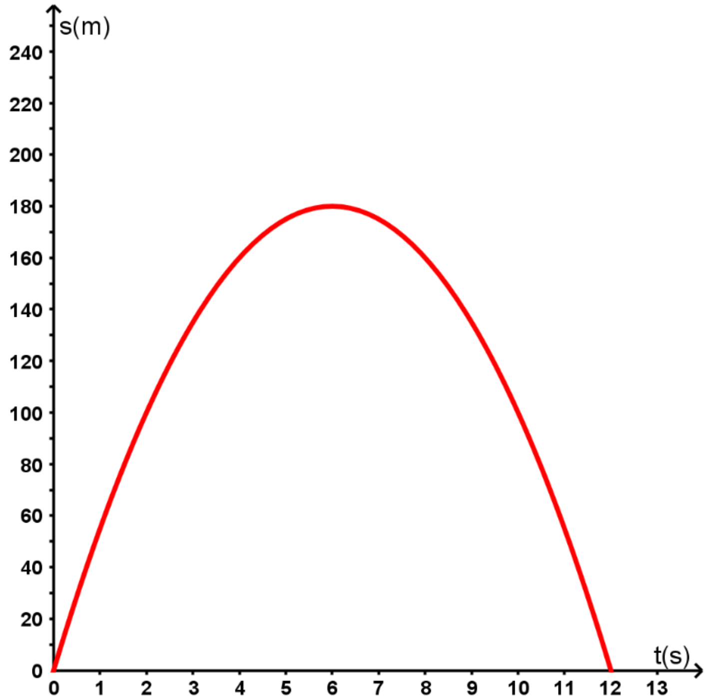
- Vertikalni hitac složeno je gibanje koje se sastoji od jednolikog gibanja po pravcu i slobodnog pada.
- Pomak kod vertikalnog hica jest funkcija koja ovisi o vremenu $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, gdje je v_0 brzina kojom je tijelo izbačeno.

Zadatak 3.
Ako je $v_0 = 60$ m/s, koliki je domet vertikalnog hica? Koliko treba proći vremena od izbacivanja tijela do postizanja najveće visine?
(uzmimo da je $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:
Jednadžba gibanja glasi:

$$s = 60t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$$

$$s = -5t^2 + 60t$$



Najveću vrijednost (domet) s = 180 m tijelo postigne u t = 6 s.

Zadatak 4.

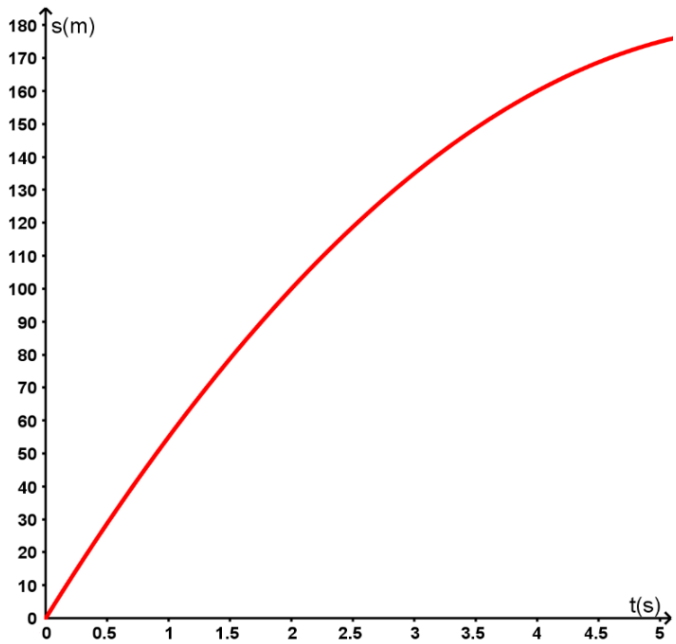
Prikažite grafički ovisnost puta s o vremenu t i ovisnost brzine o vremenu za tijelo koje je bačeno vertikalno u vis početnom brzinom 20 m/s.

Treba obuhvatiti vrijeme prvih 5 sekundi u intervalima 0,5 s.

(uzmimo da je $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$s = 20t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \qquad s = -5t^2 + 20t$$



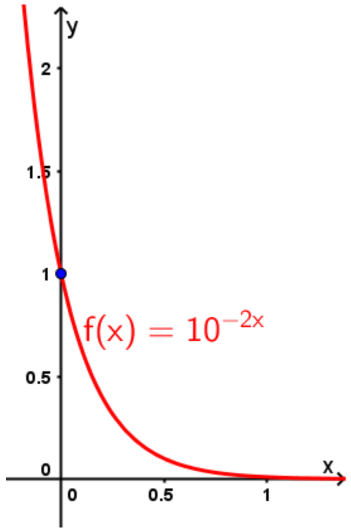
2.4. Eksponencijalna funkcija i njena primjena

Zadatak 1.

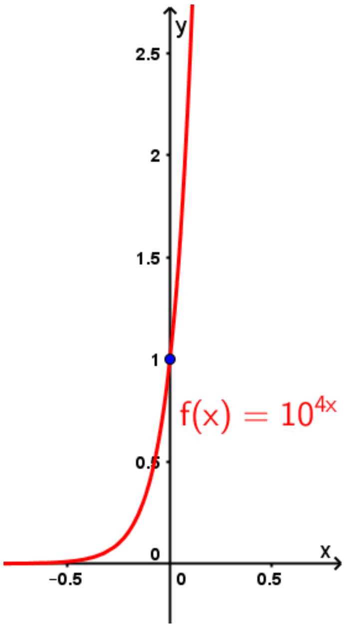
Koristeći se alatom GeoGebra odredite vrijednost parametra k tako da graf funkcije f prolazi kroz zadanu točku:

	Funkcija:	Točka:
a)	$f(x) = 10^{-kx}$	$T(3, 0.000001)$
b)	$f(x) = 10^{kx}$	$T(0.5, 100)$

Rješenje:



a) *k=2*

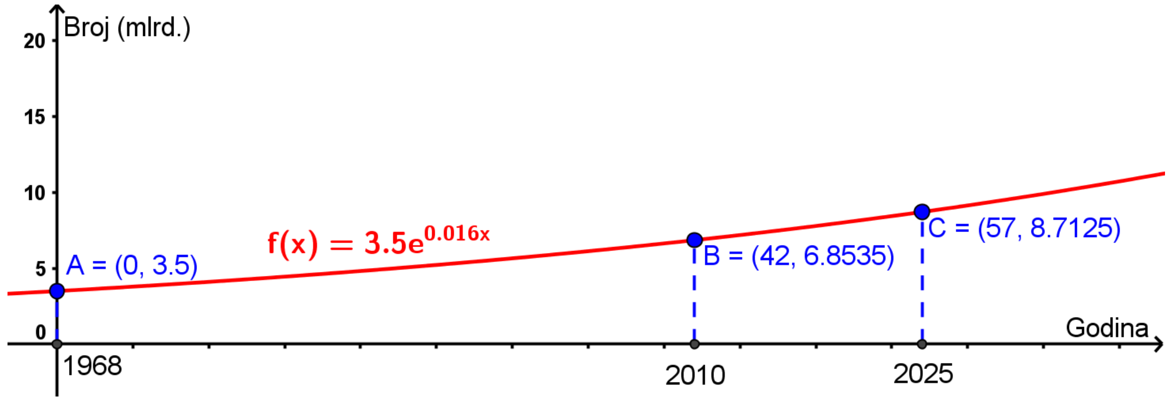


b) *k=4*

Zadatak 2.

Funkcija $f(x) = 3.5\, e^{0.016\, x}$ opisuje ljudsku populaciju, $f(x)$ u milijardama, x godina nakon 1968. Pomoću grafičkog prikaza zadane funkcije ljudske populacije u GeoGebri procijenite brojnost (u milijardama) ljudske vrste u godinama: 1968., 2010., 2025.

Rješenje:



Brojnost (u milijardama) ljudske vrste u godinama: 1968. **3.5;** 2010. **6.8535;** 2025. **8.7125.**

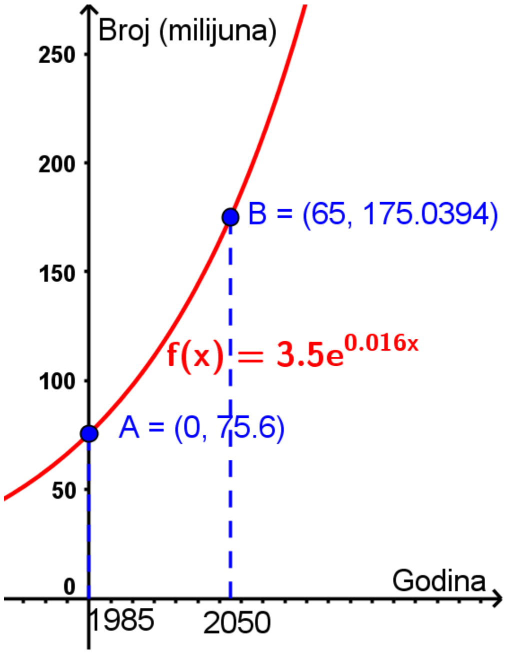
Zadatak 3.

Populacija stanovništva Brazila modelirana je funkcijom $f(x) = 75.6\ (1.013)^x$, gdje je $f(x)$ broj stanovnika u milijunima, x godina nakon 1985.

1) Procijenite populaciju Brazila u 2050. godini.
2) Bez kalkulatora procijenite populaciju Brazila na početku mjerenja 1985. godine.

Rješenje:

1) $f(65) = 75.6\ (1.013)^{65} = 175.0394$ milijuna stanovnika
2) $f(0) = 75.6\ (1.013)^{0} = 75.6$ milijuna stanovnika



Zadatak 4.

Iz fizike vam je poznat Newtonov zakon hlađenja dan formulom koja modelira temperaturu tijela koje se samo hladi:

$$T(x) = T_R + (T_0 - T_R)e^{kx}, \qquad k < 0$$

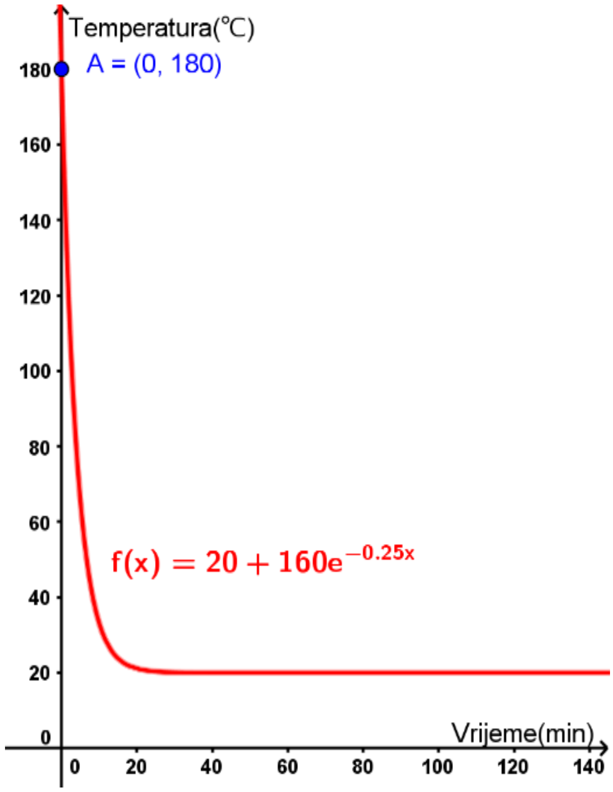
gdje je

T_0 početna temperatura tijela,
T_R temperatura sobe ili okruženja tijela,
x broj proteklih minuta vremena,
$T(x)$ temperatura tijela nakon x minuta,
k koeficijent hlađenja ovisan o prirodi i fizičkim svojstvima tijela.

Zamislimo da smo iz svoje pećice upravo izvadili svježe pečeni kruh temperature 180 °C i ostavili ga na kuhinjskom stolu da se ohladi. Temperatura kuhinje je 20 °C i koeficijent hlađenja za ovaj tip kruha iznosi $k = -0.25$.

1) Koristeći se zadanim vrijednostima modelirajte funkciju hlađenja $T(x)$.
   Rješenje: $\boldsymbol{T(x) = 20 + 160e^{-0.25x}}$

2) Nacrtajte graf funkcije $T(x)$ u GeoGebri.



3) Koristeći se grafom u GeoGebri odredite temperature kruha za svaki od zadanih trenutaka vremena u sljedećoj tablici.

Minuta	0	3	6	9	12	15	18
Temperatura kruha (°C)	**180**	**95.58**	**55.70**	**36.86**	**27.97**	**23.76**	**21.78**

Zadatak 5.
Koristeći Newtonov zakon hlađenja tijela riješite sljedeći problem algebarski i grafički koristeći GeoGebru te usporedite dobivene rezultate:
Šalica čaja ohladila se s temperature od 93 °C na 51 °C nakon 13 minuta boravka na sobnoj temperaturi od 20 °C. Koliko će vremena biti potrebno kako bi se čaj ohladio do 30 °C ?

Rješenje:
Odredimo za početak veličinu parametra *k:*
$T(13) = 51$
$20 + (93 - 20)e^{13k} = 51$
$73e^{13k} = 31$
$e^{13k} = \frac{31}{73} \quad / \ln$
$-0.8564722367 = 13k \quad /:13$
$k = -0.06588247974$

Dakle odredili smo približnu vrijednost parametra k. Sada je potrebno riješiti jednadžbu po varijabli x:

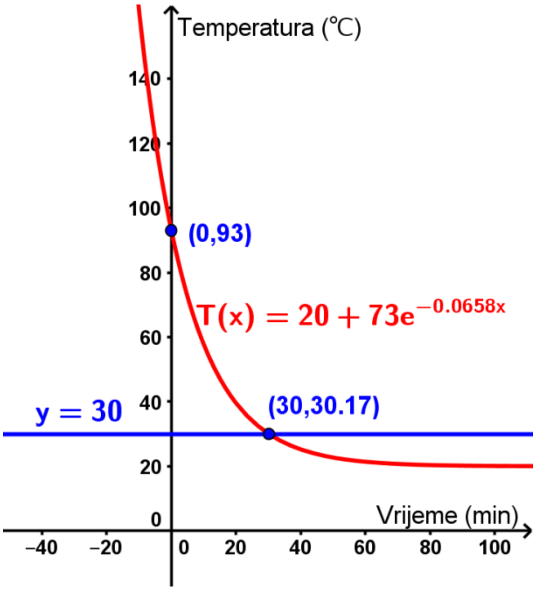
$T(x) = 30$

$20 + (93 - 20)e^{-0.0658x} = 30$

$73e^{-0.0658x} = 10$

$e^{-0.0658x} = \frac{10}{73} \quad / \ln$

$x = \ 30.17 \text{ minuta}$



Projektni zadatak.

Koristeći Newtonov zakon hlađenja tijela riješite sljedeći problem algebarski i grafički koristeći GeoGebru te usporedite dobivene rezultate iz prethodna dva zadatka.

Pecivo je izvađeno iz pećnice i s temperature od 355 °F ohladilo se do 125 °F nakon 25 min boravka na sobnoj temperaturi od 70 °F. Koliko će vremena biti potrebno kako bi se pecivo ohladilo do 95 °F?

Rješenje:

Odredimo veličinu parametra *k* iz teksta zadatka:

$T(25) = 125$

$70 + (355 - 70)e^{25k} = 125$

$285e^{25k} = 55$

$e^{25k} = \frac{55}{285} \quad / \ln$

$\ln\left(\frac{55}{285}\right) = 25k \quad /: 25$

$k = -0.0658062398$

Dakle odredili smo približnu vrijednost parametra k. Sada je potrebno riješiti jednadžbu po varijabli x:

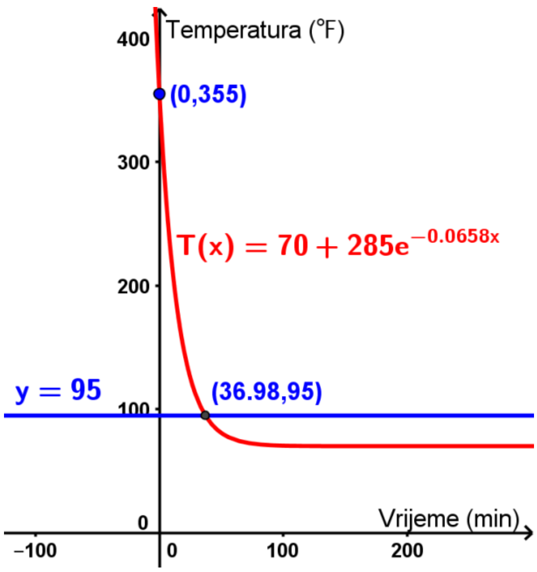
$T(x) = 95$

$70 + (355 - 70)e^{-0.0658062398x} = 95$

$285e^{-0.0658062398x} = 25$

$e^{-0.0658062398x} = \frac{25}{285} \quad / \ln$

$x = \ 36.98 \text{ minuta.}$



Zadatak 6.

Formulom $F(h) = F_0 \cdot e^{-kh}$ modelira se broj miligrama (mg) odgovarajućeg lijeka u krvotoku pacijenta nakon h sati uz pretpostavku da je pacijent primio terapiju od F_0 mg ($h = 0$). Pretpostavimo da je promatrani pacijent primio inicijalno terapiju u količini od 10 mg lijeka. Tijekom sljedećih sati promatranja krvne slike pacijenta i praćenja količine lijeka u krvi dobiveni su sljedeći podaci:

Sat	**0**	**2**	**4**	**8**	**10**
Količina lijeka (mg)	10	6.06531	3.67879	1.35335	0.82085

a) Koristeći GeoGebru nacrtajte graf funkcije F i procijenite na temelju grafa funkcije veličinu parametra k.

b) Odredite algebarski veličinu parametra k te ga usporedite s dobivenim parametrom u prethodnom podzadatku. $\boldsymbol{k = 0.25}$.

c) Konačni oblik funkcije F glasi: $\boldsymbol{F(h) = 10 \cdot e^{-0.25h}}$.

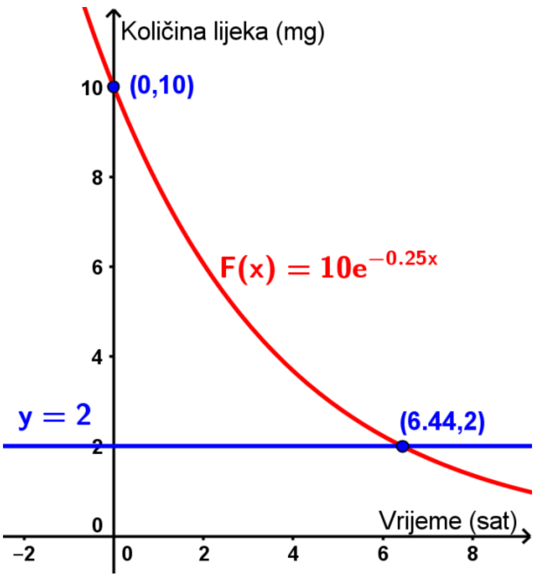
d) U trenutku kada količina lijeka u krvotoku dosegne 2 mg, potrebno je uzeti novu dozu lijeka. Odredite nakon koliko je približno sati, minuta i sekunda potrebno uzeti novu dozu lijeka u slučaju promatranog pacijenta? (Rezultat odredite jednadžbom te grafički GeoGebrom.)

Odgovor:

Novu dozu lijeka potrebno je dati pacijentu **6** sati, **26** minuta i **16** sekundi nakon prethodne doze lijeka.

e) Koristeći formulu funkcije $F(h)$ popunite tablicu s količinama lijeka u krvotoku pacijenta po satima:

Sat	1	3	5	6	7
Količina lijeka (mg)	**7.78801**	**4.72367**	**2.86505**	**2.23130**	**1.73774**



Projektni zadatak.
Formulom $P(d) = P_0 \cdot e^{-kd}$ modelira se površina rane na koži pacijenta u milimetrima kvadratnim nakon d dana od nastanka rane, uz pretpostavku da je početna površina rane P_0 milimetara kvadratnih ($d = 0$). Pretpostavimo da je nesretni pacijent zadobio ranu na koži početne površine 150 milimetara kvadratnih.
Tijekom sljedećih dana promatranja i mjerenja rane pacijenta dobiveni su sljedeći podaci:

Dan	0	2	4	6	8
Površina rane (mm^2)	150	67.39934	30.28448	13.60769	6.11433

a) Koristeći GeoGebru nacrtajte graf funkcije P i procijenite na temelju grafa funkcije veličinu parametra k. $\boldsymbol{k = 0.4}$

b) Odredite algebarski veličinu parametra k te ga usporedite s dobivenim parametrom u prethodnom podzadatku.

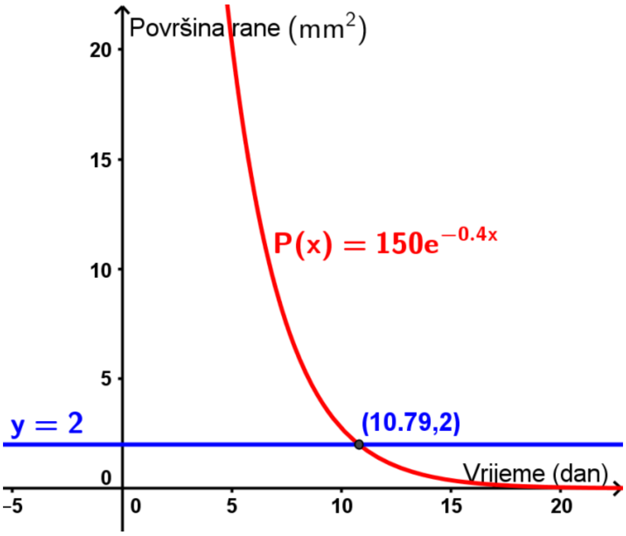
c) Konačni oblik funkcije P glasi: $\boldsymbol{P(d) = 150 \cdot e^{-0.4d}}$.

d) U trenutku kada površina rane dosegne 2 mm^2, smatramo da je zacjeljivanje rane završeno. Nakon koliko je približno dana, sati, minuta i sekunda zacjeljivanje rane završeno u slučaju promatranog pacijenta?
(Rezultat odredite jednadžbom te grafički GeoGebrom.)

Odgovor:
Ranu pacijenta smatramo zacijeljenom **10** dana, **19** sati, **2** minute i **57** sekundi nakon zadobivanja rane.

e) Koristeći formulu funkcije $P(d)$ popunite tablicu s količinama lijeka u krvotoku pacijenta po satima:

Dan	1	3	5	7	9
Površina rane (mm^2)	**100.54801**	**45.17913**	**20.30029**	**9.12151**	**4.09856**



Zadatak 7.

Černobilska nuklearna elektrana eksplodirala je 1986. godine i poslala u atmosferu oko 1000 kg radioaktivnog cezija (137). Količinu $f(x)$ u kilogramima preostalog cezija (137), x godina nakon 1986. modeliramo sljedećom eksponencijalnom funkcijom:

$$f(x) = 1000\,(0.6)^{\frac{x}{35}}$$

Kada bi samo 50 kg cezija (137) ostalo u Černobilskoj atmosferi, područje oko Černobila smatralo bi se nesigurno za boravak ljudi. Odredite $f(64)$ i odredite hoće li Černobil biti siguran za boravak ljudi do 2050. godine. Koje će godine preostati 49 kg cezija i promatrano područje postati sigurno za boravak ljudi?

Rješenje:

Ispitajmo hoće li područje Černobila biti sigurno za boravak ljudi 2050. godine. Od 1986. do 2050. proteći će 64 godine pa je potrebno odrediti $f(64)$.

$f(64) = 1000\,(0.6)^{\frac{64}{35}}$

$f(64) = 392.9468\,kg$

Budući da je masa preostalog radioaktivnog materijala veća od 50 kg, zaključujemo da 2050. godine Černobil neće biti siguran za boravak ljudi.

Odredimo sada nakon koliko će godina preostati samo 49 kg radioaktivnog cezija:

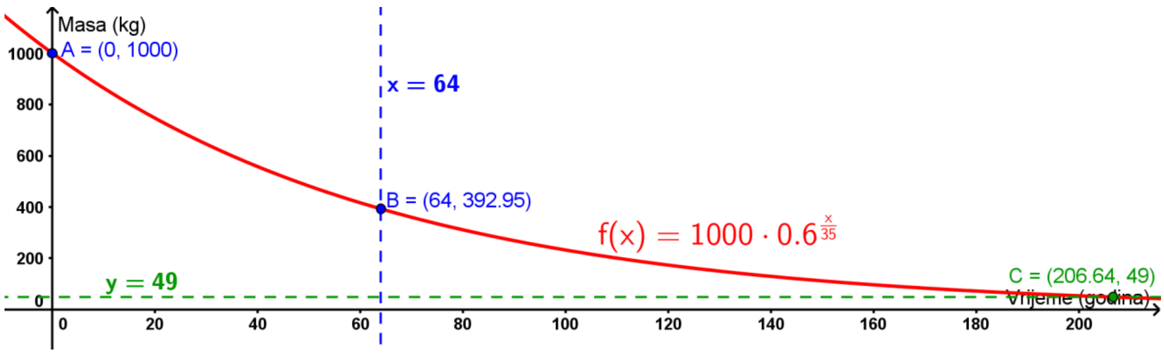
$f(x) = 49$

$49 = 1000\,(0.6)^{\frac{x}{35}}$ /:1000

$0.049 = (0.6)^{\frac{x}{35}} \quad /:\ln$

$\frac{x}{35} = \frac{\ln 0.049}{\ln 0.6}\ /\cdot 35$

$x = 206.64$ godina.



Dakle područje Černobila bit će pogodno za život ljudi 206.64 godine računajući od nesreće 1986. godine, odnosno približno 2193. godine.

Zadatak 8.

Vrijeme poluraspada (u sekundama) određene radioaktivne supstance iznosi 1.2 sekunde. Početna je masa promatrane supstance M_0 grama.

a) Izrazite količinu preostale radioaktivne supstance M kao funkciju vremena t.

b) Kolika je količina supstance preostala nakon: 1.2 s, 2.4 s, 3.6 s?

c) Odredite M_0 ako je nakon 3 sekunde preostalo 1 g radioaktivne supstance.

d) Koristeći GeoGebru nacrtajte graf funkcije $M(t)$ za $M_0 = 10$.

Rješenje:

Uočimo da u ovome zadatku koristimo model eksponencijalnog raspada radioaktivne tvari oblika: $M(t) = M_0 e^{-kt}$ gdje ćemo k odrediti iz izraza $k = \frac{\ln 2}{T}$, gdje je T poznato vrijeme poluraspada određene radioaktivne tvari.

a) Dakle u promatranom slučaju imamo $k = \frac{\ln 2}{1.2} = 0.57762$ t je model koji koristimo

$$M(t) = M_0 e^{-0.57762t}.$$

b) Količina supstance preostala nakon 1.2, 2.4, 3.6 sekundi:

Vrijeme (s)	1.2	2.4	3.6
Količina supstance (%)	50 % M_0	25 % M_0	12.5 % M_0

c) Odredimo M_0 ako je nakon 1 min preostalo 1 g radioaktivne supstance. Dakle uzimamo da je $t = 3$, $M(60) = 1$ i rješavamo jedandžbu:

$$M(60) = M_0 e^{-0.57762 \cdot 3}$$

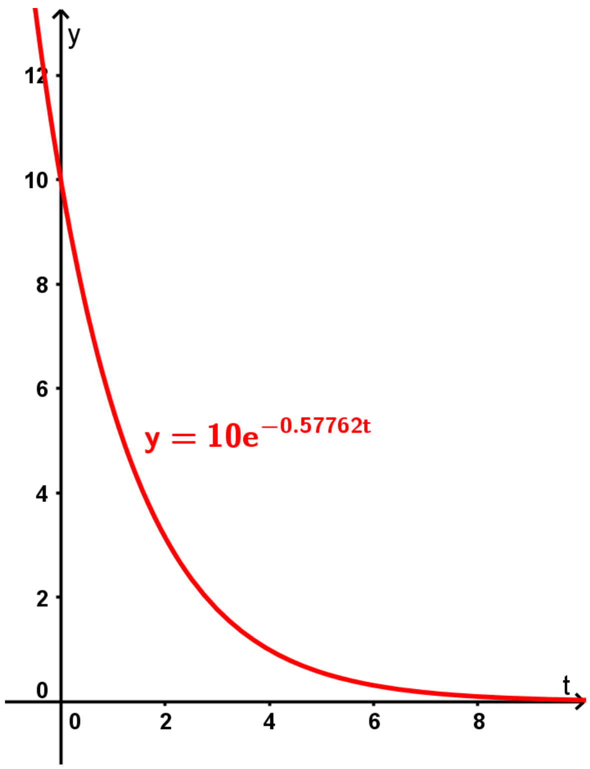
$$1 = M_0 e^{-1.73286} \qquad /: M_0$$

$$\frac{1}{M_0} = e^{-1.73286}$$

$$M_0 = \frac{1}{e^{-1.73286}}$$

$$M_0 = 5.6568 \text{ g}$$

d) Graf funkcije $M(t)$ za $M_0 = 10$:



Zadatak 9.

Pretpostavimo da je samo 1 % normalne količine izotopa ugljika ^{14}C preostalo u pronađenom fragmentu ljudske kosti na arheološkom nalazištu u Dalmaciji. Koliko je godina stara pronađena kost ako znamo da je $k = 0.00012$ za izotop ugljika ^{14}C?

Rješenje:

Iz teksta zadatka zaključujemo da je nakon traženog broja godina preostalo samo 1 % početne mase ugljika ^{14}C u fragmentu ljudske kosti. Uz zadanu stopu raspada ^{14}C dolazimo do funkcije $M(t) = M_0 e^{-0.00012t}$ koja daje masu preostalog ^{14}C nakon proteklih t godina.
Uvrštavanjem $M(t) = 0.01\,M_0$ u prethodnu formulu dobivamo:

$$0.01M_0 = M_0 e^{-0.00012t}$$
$$0.01 = e^{-0.00012t} \quad / \ln$$
$$\ln 0.01 = -0.00012\mathrm{t} \quad / : (-0.00012)$$
$$t = \frac{\ln 0.01}{-0.00012}$$
$$t = 38376.41822 \approx 38376 \text{ godina.}$$

Dakle zaključujemo da je pronađena kost približno stara 38376 godina.

Zadatak 10.

U veljači 2006. godine u Dolini kraljeva u Egiptu arheolozi su pronašli prvu neoskvrnjenu grobnicu nakon 1922. godine. Grobnica je sadržavala pet drvenih sarkofaga s mumijama. Arheolozi vjeruju da su mumije stare 3 300 do 3 500 godina. Odredite koliki su dio početnog ugljika ^{14}C mumije izgubile od mumificiranja do danas. Godišnja stopa raspada ugljika ^{14}C iznosi 0.012 %, odnosno $\mathrm{k} = 0.00012$. Rješenje odredite računski.

Rješenje:

Potrebno je odrediti koliko bi posto početne mase ugljika ^{14}C preostalo nakon proteklih 3 300 godina te nakon 3 500 godina. Uz zadanu stopu raspada ^{14}C dolazimo do funkcije $M(t) = M_0 e^{-0.00012t}$.

Nakon 3 300 godina preostalo je:

$$\begin{aligned} M(3300) &= M_0 e^{-0.00012\cdot 3300} \\ &= 0.6730066959 \cdot M_0 \\ &\approx 67.3\ \% \cdot M_0 \end{aligned}$$

Nakon 3 500 godina preostalo je:

$$\begin{aligned} M(3500) &= M_0 e^{-0.00012\cdot 3500} \\ &= 0.6570468198 \cdot M_0 \\ &\approx 65.7\ \% \cdot M_0 \end{aligned}$$

Na temelju dobivenih rezultata zaključujemo da su mumije izgubile od 32.7 % do 34.3 % ugljika ^{14}C koji su sadržavale u trenutku ukopa prije 3 300 do 3 500 godina.

Projektni zadatak.

U Sibiru su pronađene čeljusti mamuta koje su izgubile 75 % svojeg izvornog ugljika ^{14}C. Koristeći matematički model radioaktivnog raspadanja odredite približnu starost pronađenih kostiju mamuta. Stopa raspada ugljika ^{14}C iznosi 0.012%, odnosno $k = 0.00012$.

Funkcija M modelira masu ugljika ^{14}C preostalu nakon t godina od početne mase M_0:

$$M(t) = M_0\, e^{-kt}$$

Rezultat odredite računski.

Rješenje:

Iz teksta zadatka zaključujemo da je nakon traženog broja godina preostalo samo 25 % početne mase ugljika ^{14}C u čeljusti pronađenog mamuta. Uz zadanu stopu raspada ^{14}C dolazimo do funkcije $M(t) = M_0 e^{-0.00012t}$

Uvrštavanjem $M(t) = 0.25\, M_0$ u prethodnu formulu dobivamo:

$$\begin{aligned} 0.25M_0 &= M_0 e^{-0.00012t} \\ 0.25 &= e^{-0.00012t} \quad / \ln \\ \ln 0.25 &= -0.00012\text{t} \quad / : (-0.00012) \\ t &= \frac{\ln 0.25}{-0.00012} \\ t &= 11552.45301 \approx 11552\ godine \end{aligned}$$

Dakle zaključujemo da je mamutova čeljust približno stara 11 552 godine.

Zadatak 11.

Statističkom obradom podataka o broju oboljelih osoba od gripe u jednome gradu dobivena je sljedeća funkcija broja oboljelih od gripe:

$$f(s) = \frac{100000}{1 + 6000e^{-s}},$$

gdje je s broj tjedana nakon prvog pojavljivanja gripe u promatranom gradu.

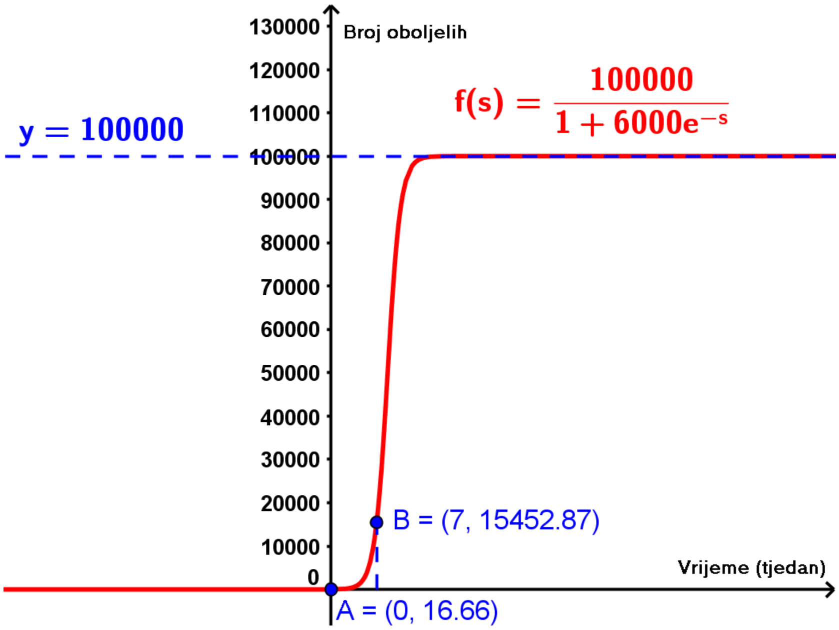
1) Koliko je ljudi bilo zaraženo na početku izbijanja gripe u gradu?
2) Koliko će ljudi biti zaraženo do kraja sedmog tjedna od početka zaraze?
3) Koji je maksimalni mogući broj oboljelih osoba od gripe u gradu?

Rješenje:

1) Uvrštavanjem $s = 0$ dobivamo da je
$f(0) = 16.67 \approx 17$ oboljelih osoba inicijalno.

2) Uvrštavanjem $s = 7$ dobivamo da je $f(7) = 15\,452{,}86$ oboljelih osoba sedam tjedana od početka zaraze.

3) Pustimo li da $s \to \infty$, dobivamo da $f(s) \to 100000$. Dakle maksimalni je broj oboljelih 100 000.



Zadatak 12.

Određena skupina bakterija ima svojstvo da svakih 5 sati udvostručuje svoj broj. Ujutro u 9 sati izbrojano je 200 bakterija u kontroliranim uvjetima. Pomoću GeoGebre odredite funkciju koja modelira rast populacije bakterija tijekom vremena. Nacrtajte graf funkcije rasta populacije bakterija te odredite kolika će biti populacija bakterija taj dan navečer u 19 sati.

Rješenje:

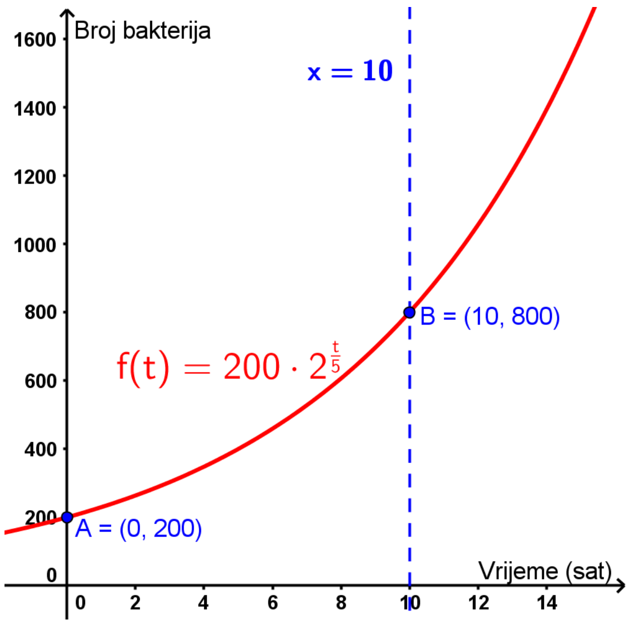
Kako bismo odredili funkciju $f(t)$ koja opisuje populaciju bakterija nakon proteklih t sati od početka promatranja, trebamo uočiti sljedeće pretpostavke:

- inicijalno imamo 200 bakterija,
- populacija bakterija ima karakteristiku eksponencijalnog rasta,
- svakih 5 sati broj bakterija u populaciji se udvostručuje.

Sintezom prethodne tri pretpostavke zaključujemo da funkcija $f(t)$ ima formulu:

$$f(t) = 200 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$$

Graf promatrane funkcije dan je na sljedećoj slici:



Zadatak 13.

Poznato je da cijena trenutno kupljenog računala pada svaki mjesec nakon kupnje. Pretpostavljamo da je cijena računala (u kunama) modelirana funkcijom vremena m (u mjesecima):

$$f(m) = 4000 \cdot (0.85)^m$$

1) Kolika će biti cijena računala nakon 6 mjeseci?
2) Nakon koliko će mjeseci kupljeno računalo vrijediti manje od 1 000 kn?

Rješenje:

1) Odredimo cijenu računala nakon 6 mjeseci, odnosno

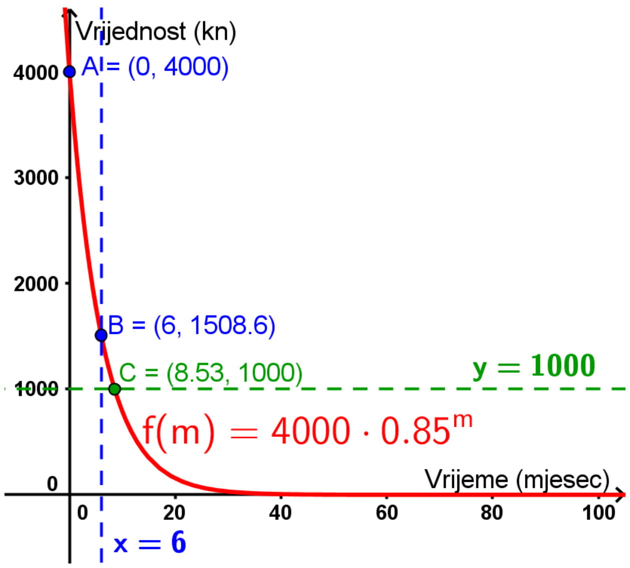
$f(6) = 4000 \cdot (0.85)^6 = 1\,508.60 \text{ kn.}$

2) Treba odrediti rješenje jednadžbe $f(m) = 1000$.

$4000 \cdot (0.85)^m$ =1000 / : 4000

$(0.85)^m = 0.25$ / $\ln$

$m = \frac{ln\,0.25}{ln\,0.85} = 8.53$ mjeseci .



Dakle nakon približno 8.53 mjeseci vrijednost računala postat će manja od 1 000 kn.

Zadatak 14.

Grad ima 14 800 stanovnika 2000. godine. Dvadeset godina kasnije grad ima 20 000 stanovnika. Odredite koristeći GeoGebru prosječnu godišnju stopu rasta populacije tog grada.

Rješenje:

Neka je t nezavisna varijabla proteklog vremena u godinama. Nadalje neka je s prosječna godišnja stopa rasta broja stanovnika promatranoga grada. Ako pretpostavljamo da je inicijalni broj stanovnika grada 14 800 te da se radi o modelu eksponencijalnog rasta broja stanovnika, slijedi da je formula koja modelira populaciju grada u ovisnosti o broju proteklih godina dana sljedećim izrazom: $S(t) = 14\,800 \cdot (1+s)^t$, gdje je s konstanta.

Prosječnu godišnju stopu rasta broja stanovnika dobivamo rješavanjem jednadžbe:

$$S(20) = 20000$$

$$14800 \cdot (1+s)^{20} = 20000 \quad /: 14800$$

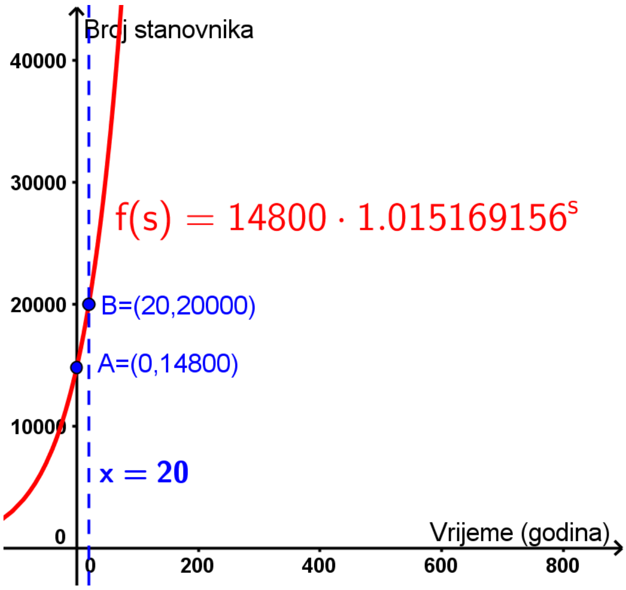
$$(1+s)^{20} = \frac{20000}{14800}$$

$$(1+s)^{20} = \frac{50}{37} \quad / \sqrt[20]{}$$

$$1 + \mathrm{s} = \sqrt[20]{\frac{50}{37}}$$

$$\mathrm{s} = \sqrt[20]{\frac{50}{37}} - 1 \approx 0.015169156 = 1.5169156\,\%$$

To je prosječna godišnja stopa rasta populacije toga grada.



Zadatak 15.

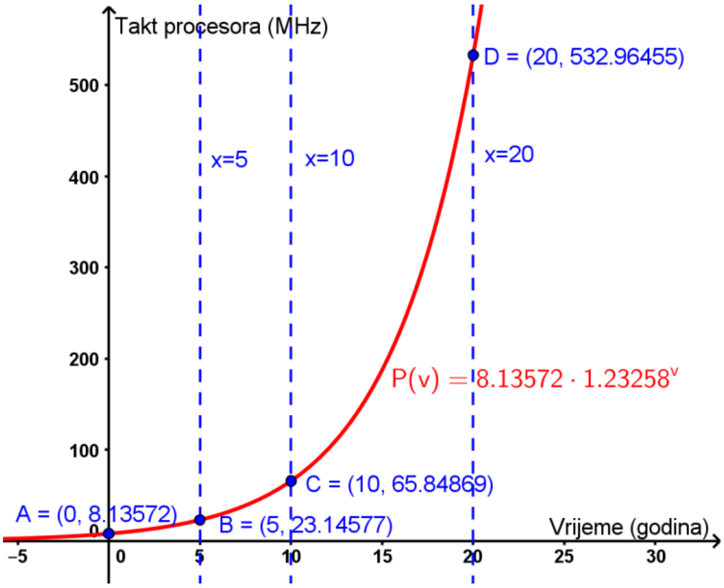
Radni takt centralne procesorske jedinice (CPU) u stalnom je porastu tijekom godina.
Od 1985. godine s 8.13572 MHz do 3 500 MHz 2014. godine. Eksponencijalna funkcija

$$P(v) = 8.13572 \cdot (1.23258)^v,$$

gdje je *v* vrijeme u godinama od 1985., može se koristiti za određivanje približnog takta CPU jedinice u traženoj godini. Koristeći GeoGebru i prethodno navedenu funkciju nacrtajte graf funkcije P te odredite na dvije decimale približni takt računala u 1990., 1995. i 2005. godini.

Rješenje:

Ovaj zadatak možemo riješiti usporedno algebarski i grafički koristeći GeoGebru.



Rješenja dobivena GeoGebrom izložit ćemo tablično:

Godina	1990.	1995.	2005.
Takt procesora (MHz)	23.14577	65.84869	532.96455

Projektni zadatak.

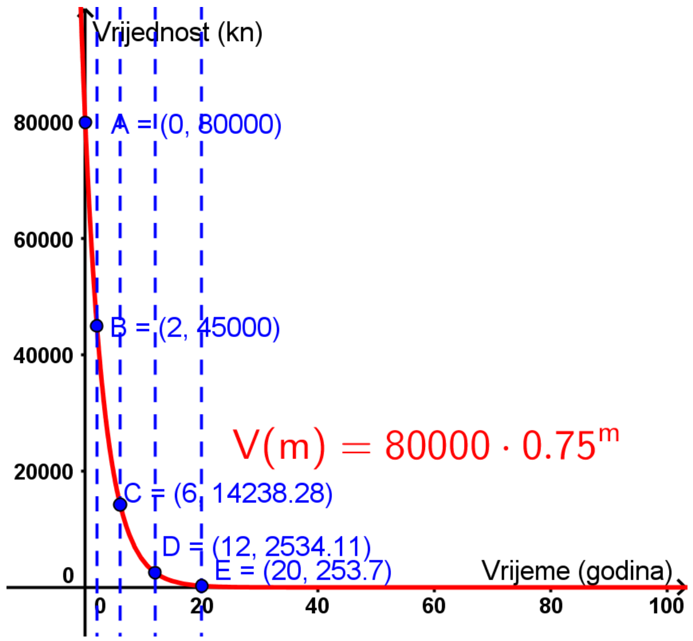
Hotel u Dalmaciji kupio je nove kuhinjske uređaje po cijeni od 80 000 kuna. Vrijednost kuhinjskih uređaja svake je godine 75 % vrijednosti uređaja u prošloj godini. Nakon *m* godina njena je vrijednost u kunama dana formulom

$$V(m) = 80000 \cdot (0.75)^m.$$

Odredite pomoću aplikacije GeoGebra vrijednosti kuhinjskih uređaja nakon proteklih 2, 6, 12 i 20 godina (zaokružite na dvije decimale).
Nacrtajte uz pomoć GeoGebre graf promatrane funkcije.

Rješenje:

Ovaj zadatak možemo riješiti usporedno algebarski i grafički koristeći GeoGebru.



Rješenja dobivena GeoGebrom izložit ćemo tablično:

Broj proteklih godina	2	6	12	20
Vrijednost (kn)	45000	14238.28	2534.11	253.70

Zadatak 16.

Atmosferski tlak P na nadmorskoj visini h dan je formulom

$$P(h) = P_0 \cdot \mathrm{e}^{-0.00005 \cdot h},$$

gdje je P_0 tlak na morskoj razini približno 101 325 Pa. Objasnite kako biste mogli odrediti nadmorsku visinu vrha nebodera ako znamo da je ondje izmjeren tlak zraka od 98 000 Pa. Graf funkcije prikažite grafički u GeoGebri.

Rješenje:

Funkcija koja daje atmosferski tlak na visini h glasi $P(t) = 101325e^{-0.00005h}$

Uvrštavanjem $P(h) = 98\,000$ u prethodnu formulu dobivamo:

$$98000 = 101325e^{-0.00005h} \qquad / : 101325$$

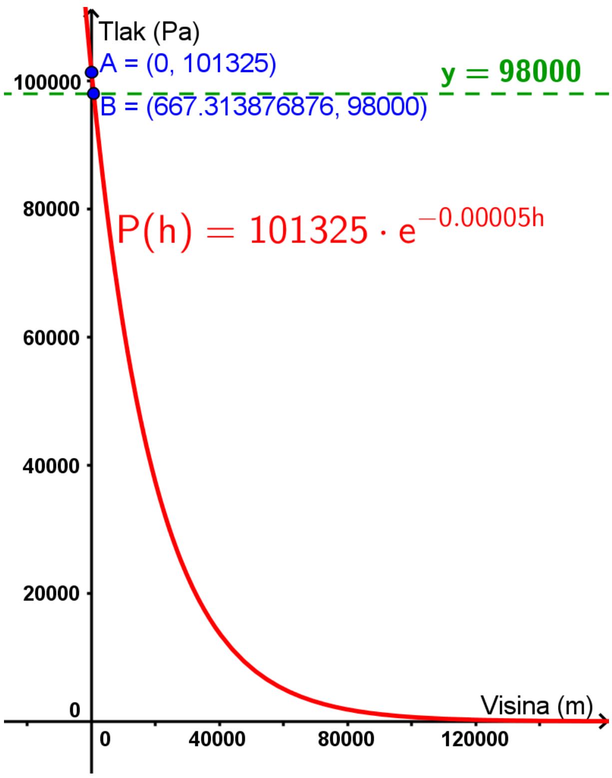
$$\frac{560}{579} = e^{-0.00005h} \qquad / \ln$$

$$\ln\frac{560}{579} = -0.00005h \qquad / : (-0.00005)$$

$$h = \frac{\ln\frac{560}{579}}{-0.00005}$$

$$h = 667.31 \approx 667 \text{ m}$$

Dakle zaključujemo da je visina nebodera približno 667 metara.


Tlak (Pa)
A = (0, 101325)
B = (667.313876876, 98000)
y = 98000
100000
80000
60000
40000
20000
0
$P(h) = 101325 \cdot e^{-0.00005h}$
Visina (m)
0
40000
80000
120000

2.5. Logaritamska funkcija i njena primjena

Zadatak 1.

Razina buke L (u Bellima) zvuka intenziteta I definira se kao funkcija

$$L = \log\frac{I}{I_0},$$

gdje je I_0 najmanji intenzitet zvuka koji može registrirati ljudsko uho. Ako je zvuk 1 000 puta intenzivniji od drugoga zvuka, tada je njegova glasnoća 3 B veća. Uočavamo da je jedinica Bell velika jedinica za primjenu u praktičnim problemima iz života pa se u praksi najčešće koristi manja jedinica decibel; pri tome je razina buke u decibelima dana formulom

$$L = 10\ \log\frac{I}{I_0}\ \text{dB}.$$

Odredite glasnoću u decibelima za svaki zadani intenzitet zvuka:

Mlazni zrakoplov	$10^{15}\cdot I_0$	**150 dB**
Glasan punk koncert	$10^{10.5}\cdot I_0$	**105 dB**
Glasanje slavuja	$10^{3}\cdot I_0$	**30 dB**
Normalan razgovor	$10^{5.3}\cdot I_0$	**53 dB**
Grmljavina	$10^{13}\cdot I_0$	**130 dB**

Zadatak 2.

Beer-Lambertov zakon apsorpcije svjetla primijenjen na Jezero Erie (SAD) kaže da intenzitet osvijetljenosti I (lumen) na dubini od x metara zadovoljava jednadžbu:

$$\log\frac{I}{12} = -0.00235\,x.$$

Odredite intenzitet osvijetljenosti na dubini od 50 m.

Rješenje:

Uvrštavanjem vrijednosti $x = 50$ dobivamo intenzitet osvijetljenosti:

$\log\frac{I}{12} = -0.00235\ \cdot 50$

$\log\frac{I}{12} = -0.1175\ /\ 10^{*}$

$\frac{I}{12} = 0.70629568912\ /\ \cdot 12$

$\boldsymbol{I = 9.155482694\ \text{lumen}}$

Dakle osvijetljenost mora na dubini od 50 m iznosi $\mathbf{9.155482694\ lumen.}$

Zadatak 3.

Richterova skala jakosti potresa R temelji se na svojstvima povezanima sa seizmičkim valovima i određuje se koristeći formulu:

$$R = \log\left(\frac{a}{T}\right) + B,$$

gdje je a amplituda u μm (mikrometrima), T je period trajanja u sekundama, dok je B slabljenje seizmičkih valova zbog udaljenosti od epicentra potresa.

Izračunajte intenzitete potresa s danim parametrima:

a) $a = 200, T = 3$ i $B = 3.25$

b) $a = 350, T = 5$ i $B = 4.5$

Rješenje:

Uvrštavanjem vrijednosti zadanih u prethodnoj tablici dobivamo:

a) $R = \log\left(\frac{200}{3}\right) + 3.25 \quad \Rightarrow R = 5.073908741$

b) $R = \log\left(\frac{350}{5}\right) + 4.5 \quad \Rightarrow R = 6.34509804$

Zadatak 4.

U kemiji definiramo **pH vrijednost** tvari kao pH$= -\log[H^+]$, gdje je H^+ koncentracija iona vodika (mol/L). Odredite koristeći GeoGebru pH vrijednosti (zaokruži na četiri decimale) za svaki uzorak:

SUPSTANCA	KONCENTRACIJA VODIKOVIH IONA	pH VRIJEDNOST
Sok od jabuke	1.85×10^{-5}	**4.7328**
Šampon za kosu	0.000012	**4.9208**
Pasta za zube	5.8×10^{-8}	**7.2366**
Krastavci	2.12×10^{-9}	**8.6737**
Naranča	7.5×10^{-4}	**3.1249**

Zadatak 5.

Određeni ocat ima pH vrijednost 2.4, a obična soda bikarbona ima pH 8.5.

a) Kolike su koncentracije vodikovih iona u octu i sodi bikarboni?

b) Koliko je puta veća koncentracija vodikovih iona u octu nego u sodi bikarboni?

Rješenje:

a) Ocat:

$$-\log[H^+] = 2.4$$
$$\log[H^+] = -2.4$$
$$[H^+] = 10^{-2.4} \approx 3.981 \times 10^{-3}$$ mola po litri

Soda bikarbona:

$$-\log[H^+] = 8.5$$
$$\log[H^+] = -8.5$$
$$[H^+] = 10^{-8.5} \approx 3.16 \times 10^{-9}$$ mola po litri

b) $\frac{[\boldsymbol{H^+}]\ \boldsymbol{octa}}{[\boldsymbol{H^+}]\boldsymbol{sode\ bikarbone}} = \frac{\mathbf{10^{-2.4}}}{\mathbf{10^{-8.5}}} = \mathbf{1258925.412} = \mathbf{1.258925412 \times 10^6}$

Zadatak 6.

Mineralna voda ima pH vrijednost 3.8, a sredstvo za čišćenje ima pH 11.8.

a) Kolike su koncentracije vodikovih iona u mineralnoj vodi i sredstvu za čišćenje?

b) Koliko je puta veća koncentracija vodikovih iona u mineralnoj vodi nego u sredstvu za čišćenje?

Rješenje:

a) Mineralna voda:

$$-\log[H^+] = 3.8$$
$$\log[H^+] = -3.8$$
$$[H^+] = 10^{-3.8} \approx 1.5848931 \times 10^{-4} \text{ mola po litri}$$

Sredstvo za čišćenje:

$$-\log[H^+] = 11.8$$
$$\log[H^+] = -11.8$$
$$[H^+] = 10^{-11.8} \approx 1.5848931 \times 10^{-12} \text{ mola po litri}$$

b) $\frac{[\boldsymbol{H^+}]\ \boldsymbol{mineralna\ voda}}{[\boldsymbol{H^+}]\boldsymbol{sredstvo\ za\ čišćenje}} = \frac{\mathbf{10^{-3.8}}}{\mathbf{10^{-11.8}}} = \mathbf{10^{(-3.8)-(-11.8)}} = \mathbf{10^{8}}$

Zadatak 7.

Sok od limuna ima pH vrijednost 2.2, a pivo ima pH 4.

a) Kolike su koncentracije vodikovih iona u soku od limuna i pivu?

b) Koliko je puta veća koncentracija vodikovih iona u soku od limuna nego u pivu?

Rješenje:

a) Sok od limuna:

$$-\log[H^+] = 2.2$$
$$\log[H^+] = -2.2$$
$$[H^+] = 10^{-2.2} \approx 6.30957344 \times 10^{-3} \text{ mola po litri}$$

Pivo:

$$-\log[H^+] = 4$$
$$\log[H^+] = -4$$
$$[H^+] = 10^{-4} \text{ mola po litri}$$

b) $\frac{[\boldsymbol{H^+}]\ \boldsymbol{octa}}{[\boldsymbol{H^+}]\boldsymbol{sode\ bikarbone}} = \frac{\mathbf{10^{-2.2}}}{\mathbf{10^{-4}}} = \mathbf{10^{(-2.2)-(-4)}} = \mathbf{10^{1.8}} = \mathbf{63.09573445}$

Zadatak 8.

Želučana kiselina ima pH vrijednost 2.1, a krv ima pH 7.5.

a) Kolike su koncentracije vodikovih iona u želučanoj kiselini i krvi?

b) Koliko je puta veća koncentracija vodikovih iona u želučanoj kiselini nego u krvi?

Rješenje:

a) Želučana kiselina:

$$-\log[H^+] = 2.1$$
$$\log[H^+] = -2.1$$
$$[H^+] = 10^{-2.1} \approx 7.94328234 \times 10^{-3} \text{ mola po litri}$$

Krv:

$$-\log[H^+] = 7.5$$
$$\log[H^+] = -7.5$$
$$[H^+] = 10^{-7.5} \approx 3.16227766 \times 10^{-8} \text{ mola po litri}$$

b) $\frac{[H^+]\ octa}{[H^+] sode\ bikarbone} = \frac{10^{-2.1}}{10^{-7.5}} = \mathbf{10^{(-2.1)-(-7.5)} = 10^{5,4} = 251\,188,6431}$

Projektni zadatak.

Analgetik je ubrizgan intravenozno pacijentu zbog jakih bolova.
Funkcija $f(x) = 602.77 - 115\ln(45 + 13x)$, gdje je $0 \leq x \leq 12$ daje količinu lijeka (u mg) prisutnu u tijelu pacijenta nakon x sati.
Koristeći GeoGebru:
a) odredite inicijalnu količinu lijeka u tijelu u trenutku ubrizgavanja u venu,
b) odredite količinu lijeka prisutnog u tijelu nakon 3 sata,
c) nacrtajte graf funkcije f i procijenite nakon koliko je sati količina lijeka u tijelu zanemariva.

Rješenje:

a) Inicijalnu količinu lijeka odredit ćemo ako uvrstimo $x = 0$ u funkciju f.
Uvrštavanjem u formulu dobivamo:

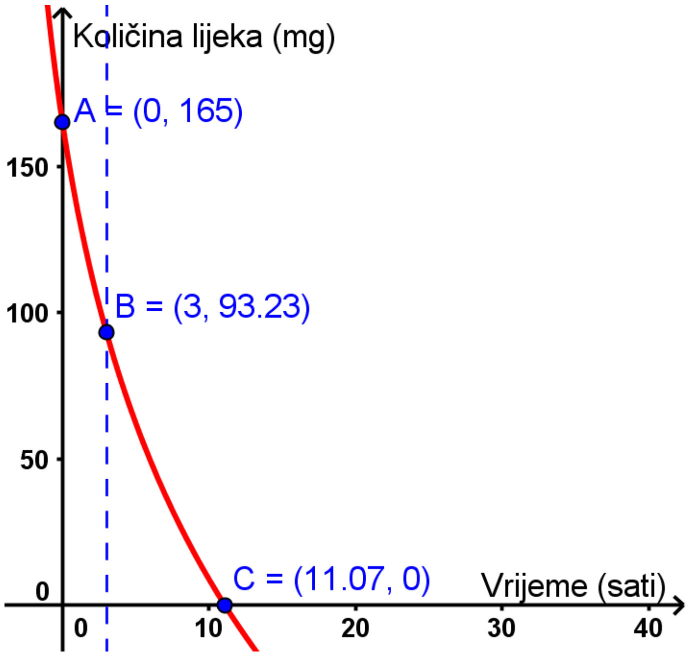
$$f(0) = 602.77 - 115\ \ln 45$$
$$f(0) = 165.0038137 \text{ mg } \approx 165 \text{ mg}$$

b) Količinu lijeka nakon 3 sata odredit ćemo ako uvrstimo $x = 3$ u funkciju f.
Uvrštavanjem u formulu dobivamo:

$$f(3) = 602.77 - 115\ \ln(45 + 13 \cdot 3)$$
$$f(3) = 93.22606813 \text{ mg } \approx 93.23 \text{ mg}$$

c) Količina lijeka bit će zanemariva u trenutku kada je $f(x) = 0$.
Riješimo stoga jednadžbu:

$$f(x) = 0$$
$$602.77 - 115\ \ln(45 + 13x) = 0$$
$$-115\ \ln(45 + 13 \cdot x) = -602.77 \quad /:(-115)$$
$$\ln(45 + 13x) = 5.241478261 \quad /e^*$$
$$45 + 13x = 188.9492123$$
$$13x = 143.9492123 \quad /:13$$
$$x = 11.07301633 \text{ sati}$$
$$x = 11 \text{ sati 4 minute 22.86 sekundi.}$$

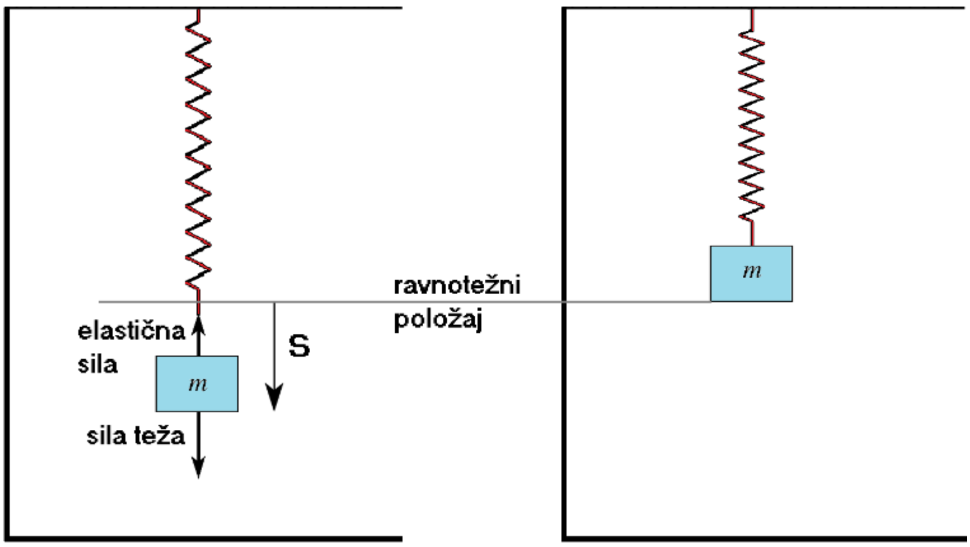

Količina lijeka (mg)
A = (0, 165)
B = (3, 93.23)
C = (11.07, 0)
Vrijeme (sati)
150
100
50
0
0
10
20
30
40

2.6. Trigonometrijske funkcije i njihove primjene

Uobičajeno je trigonometriju primjenjivati u svakodnevnom životu za rješavanje problema koji se svode na izračunavanje elemenata trokuta (graditeljstvo, geodezija, cestogradnja, astronomija i slično) i smatra se dobrim postignućem ako su učenici dosegnuli takvu razinu znanja. Međutim trigonometrijske funkcije imaju mnogo širu primjenu u istraživanju periodičnih pojava u prirodi. Funkcije sinus i kosinus koristimo u modeliranju bilo kojeg procesa koji se ponavlja, na primjer harmonijska titranja, prostiranja elektromagnetskih valova ili oscilacija izmjenične struje u fizici.

Harmonijsko titranje najjednostavnije je periodičko gibanje. Gibanje koje čini uteg pričvršćen na elastičnu oprugu dobar je model za izučavanje harmonijskog titranja (u realnom svijetu na uteg djeluje i sila trenja koja smanjuju elongaciju). Kada uteg miruje, nalazi se u ravnotežnom položaju. Ako ga povučemo prema dolje i ispustimo, zatitrat će oko položaja ravnoteže. Na oprugu djeluje elastična sila koja je nastoji vratiti u položaj ravnoteže pa se gibanje utega ponavlja u određenom vremenskom razdoblju (periodu):

$$\boldsymbol{f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$



Slika 22. Gibanje utega na elastičnoj opruzi

Zadatak 1.

Titranje utega na opruzi opisano je funkcijom $f(x) = 10\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$, gdje je $f(x)$ udaljenost u centimetrima od ravnoteže u t-toj sekundi.

a) Odredite amplitudu, frekvenciju, početnu fazu i period tog gibanja.

b) Nacrtajte grafički prikaz titranja.

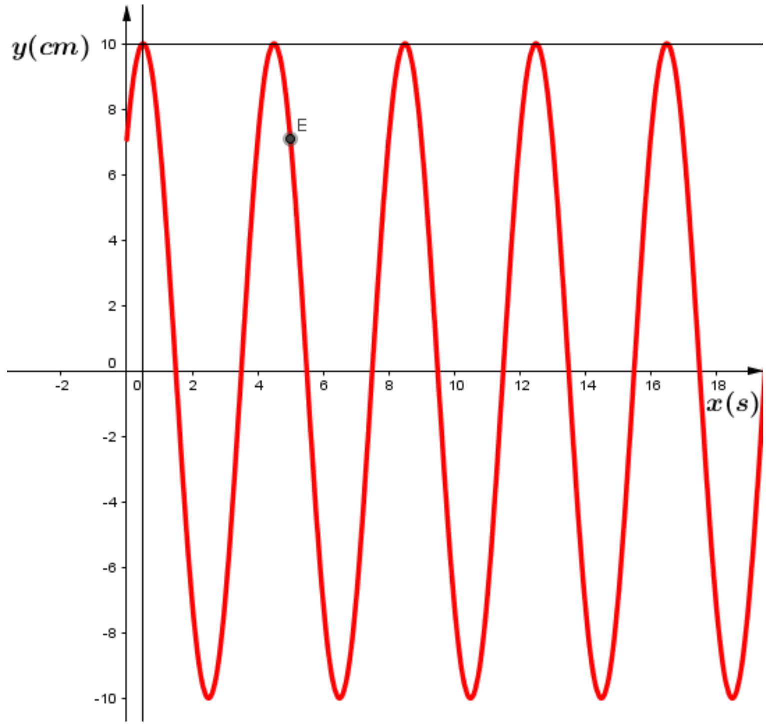
c) Odredite položaj utega nakon 5-e sekunde.

d) U kojoj je sekundi (od početka gibanja) uteg u najvišem položaju?

Rješenje:

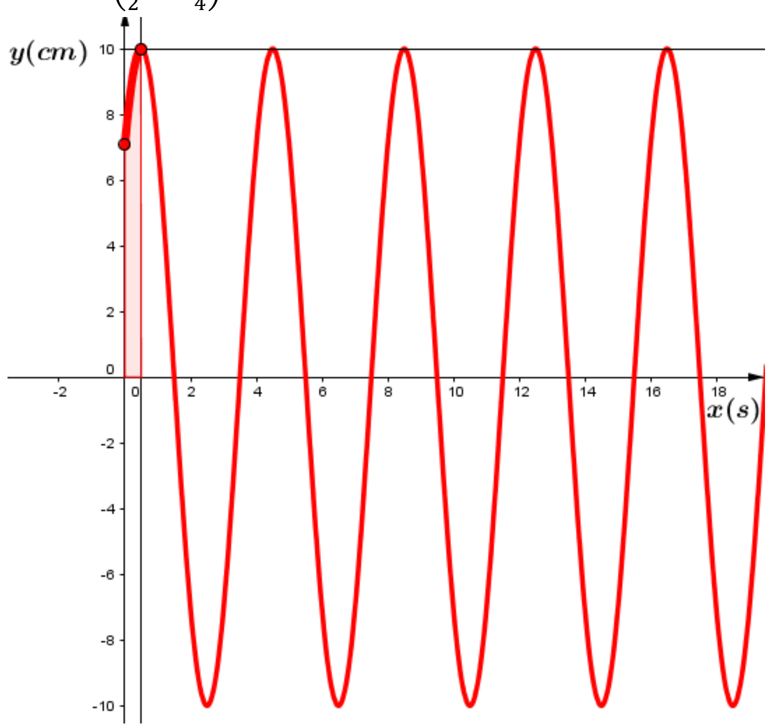
a) Vidljivo je iz jednadžbe: amplituda A = 10, kružna frekvencija $\omega = \frac{\pi}{2}$, početna faza $\varphi = \frac{\pi}{4}$, a period (duljina vala) je $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 4$.

b)



c) $f(5)$ = 10 sin$\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ = 7.07 cm

d) $f(t)$ = 10 ⇒ 10 sin$\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = 10 \Rightarrow t = 0.5$



Zadatak 2.

Uteg na opruzi titra s amplitudom 6 cm, a vrijeme titraja iznosi 26 sekundi. U vremenu t = 0 uteg je bio 3 cm iznad položaja ravnoteže.

a) Napišite jednadžbu titranja.

b) Nacrtajte graf funkcije koja prikazuje titranje utega.

c) Odredite položaj u t = 13 s.

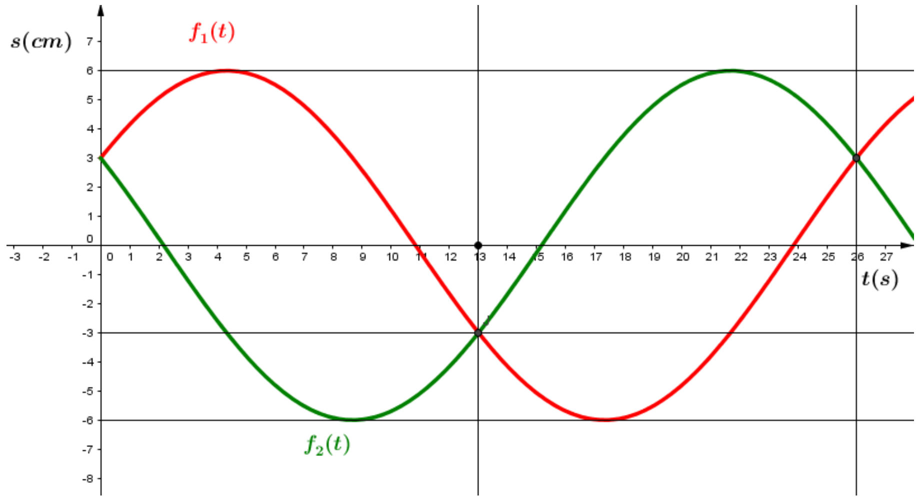
d) Odredite periode vremena kada je uteg više od 5 cm iznad položaja ravnoteže.

Rješenje:

a) Jednadžbe titranja glase: $f_1(t) = 6\sin\left(\frac{\pi}{13}t + \frac{\pi}{6}\right)$,

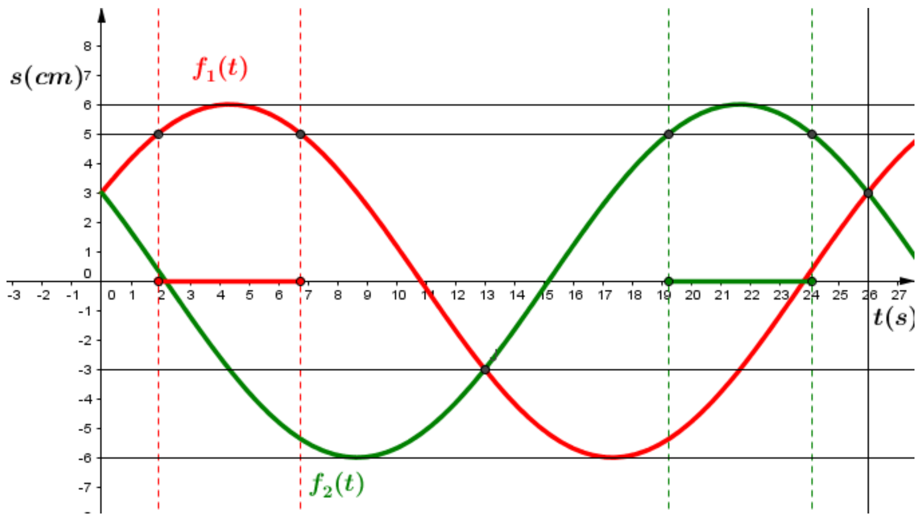
$$f_2(t) = 6\sin\left(\frac{\pi}{13}t + \frac{5\pi}{6}\right),$$

b)



c) $f_1(13) = 6\sin\left(\frac{\pi}{13}\cdot 13 + \frac{\pi}{6}\right) = -3$ $\qquad f_2(13) = 6\sin\left(\frac{\pi}{13}\cdot 13 + \frac{5\pi}{6}\right) = -3$

d)

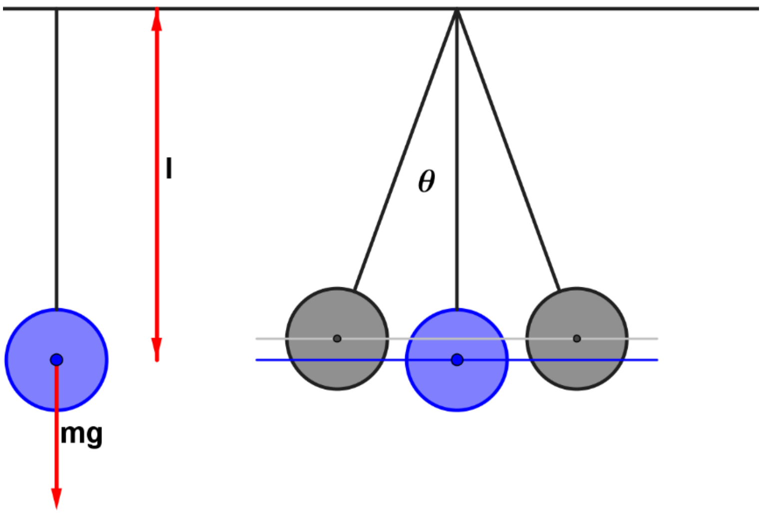


$$t\epsilon[1.9 + 26k, 6.8 + 26k] \cup [19.2 + 28k, 24.1 + 28k]$$

Matematičko njihalo: ako pričvrstimo malu olovnu kuglicu na tanku, nerastezljivu nit i otklonimo je za izvjestan kut θ od njenog ravnotežnog položaja, onda ta kuglica na niti vrlo male težine predstavlja matematičko njihalo. Kuglica se neće zaustaviti u svom ravnotežnom položaju, već će oko njega titrati ili oscilirati. Put njihala između krajnjih točaka zove se jedan **titraj**, a vrijeme koje je potrebno da njihalo učini jedan titraj zove se **period** ili **vrijeme titraja**. Kad ne bi bilo trenja u osloncu i otpora zraka, njihalo bi se stalno njihalo i uvijek bi se popelo do iste visine. Međutim njegova se energija polagano troši na otpor zraka i trenje te titraji postaju sve slabiji dok se njihalo konačno ne umiri u ravnotežnoj točki.

Period titraja jednog matematičkog njihala iznosi: $\boldsymbol{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ pri čemu je l duljina njihala, a g akceleracija sile teže. Funkcija koja opisuje gibanje njihala jest:

$$\boldsymbol{f(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \varphi\right)}$$



Slika 23. Matematičko njihalo

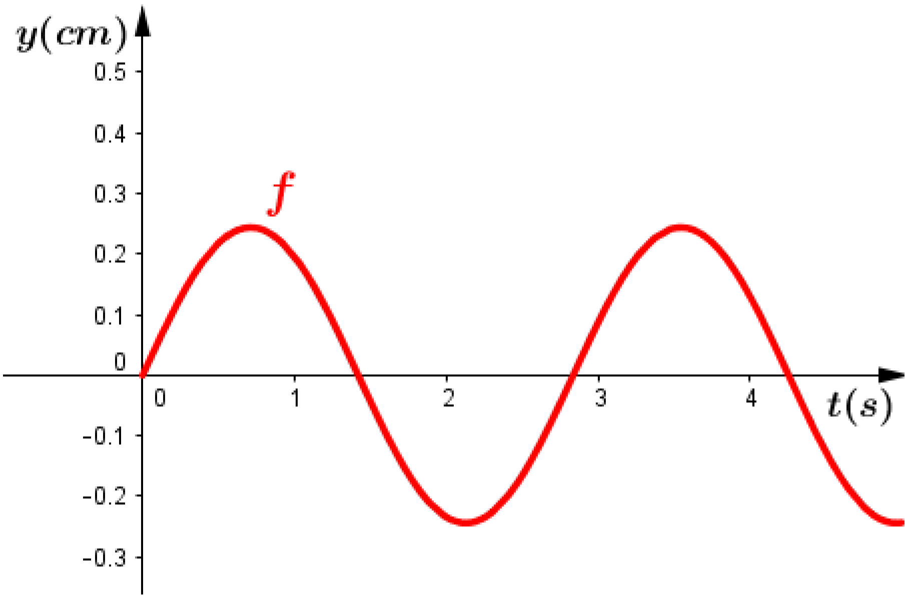
Zadatak 3.

Kuglicu obješenu na nit dugu 2 m otklonimo iz položaja ravnoteže za 7°. Odredite funkciju gibanja i prikažite je grafički ako je početna faza 0?

Rješenje:

$$A = 2\sin 7^\circ = 0.244, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2.215\,, \quad \varphi = 0^\circ$$

$$f(t) = 0.244\sin(2.215t)$$



Prostiranje valova – valna jednadžba: matematički izraz za valno gibanje određen je promatranjem sinusoidnog vala koji se giba u smjeru osi *x* u beskonačnom sredstvu. Pomak čestice označavamo s *y* (bilo u transverzalnom ili longitudinalnom smjeru). Kako se val širi, tako u svakom trenutku *t* pomak čestice *y* ovisi o položaju *x* dane čestice. Zbog jednostavnijeg predočavanja promatra se transverzalni pomak čestice. U proizvoljnom trenutku, koji možemo označiti *t = 0*, transverzalni pomak čestice jednak je *y*. Čestica titra harmonijski pa je pomak određen izrazom

$$\boldsymbol{y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$Oblik\ vala\ u\ trenutku\ t = 0$$

Druga je komponenta vrijeme – svaka čestica u sredstvu vremenski titra. Pomak *y* ponovo je određen harmonijskim titranjem pa je u proizvoljnoj točki *x = 0* transverzalni pomak čestice određen izrazom

$$\boldsymbol{y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} t.}$$

$$Oblik\ titranja\ svake\ čestice\ u\ valu\ za\ x = 0$$

Pomak *y* čestice u valu ovisi o dvije veličine: o položaju čestice *x* i o vremenu *t*.
Prema tome i funkcija koja prikazuje širenje vala bit će funkcija dviju varijabli *x* i *t*.

$$\boldsymbol{y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}$$

Ako čestica mijenja položaj u svakom trenutku *t*, prikazana funkcija predstavlja gibanje vala.
No kako je $\frac{\lambda}{T} = u$ (brzina širenja vala), a kosinus je parna funkcija, izraz za prostiranje vala može se pisati u obliku:

$$\boldsymbol{y(x,t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ut - x),}$$

gdje je ***A* amplituda vala**, a argument sinusa $\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x)$ naziva se **faza vala.**

Zadatak 4.

Transverzalni sinusoidni val amplitude A = 10 cm i valne duljine λ = 200 cm giba se slijeva nadesno uzduž dugačke vodoravne napete žice brzinom od 100 cm/s. U trenutku *t = 0* lijevi se kraj žice nalazi u koordinatnom početku i kreće prema dolje.

a) Nađite jednadžbu koja opisuje gibanje vala.

b) Odredite frekvenciju vala.

c) Nađite jednadžbu koja opisuje gibanje točke u koordinatnom početku (*x = 0*) i nacrtaj graf funkcije u ovisnosti o vremenu *t*.

d) Nađite transverzalni pomak u trenutku *t = 3* s čestice koja se nalazi 250 cm desno od koordinatnog početka.

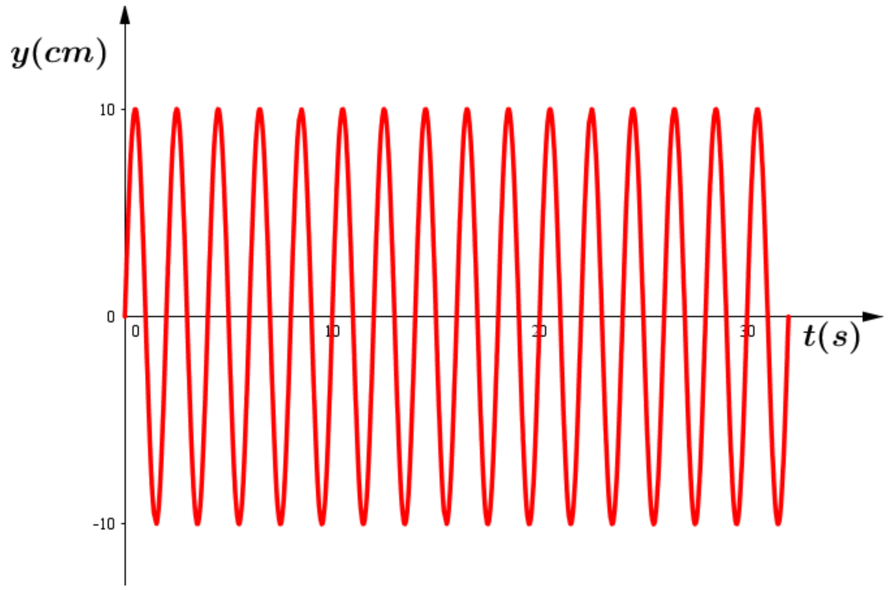
Rješenje:

a) Budući da je *y(x,t)= A* sin$\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x)$, prema zadanim uvjetima jednadžba koja opisuje gibanje vala glasi:

$$y(x,t) = 10 \sin\frac{2\pi}{200}(100t - x) = 10 \sin \pi\left(t - \frac{x}{100}\right)$$

b) Frekvencija vala $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{100 \text{ cm/s}}{200 \text{ cm}} = 0.5\ s^{-1} \Rightarrow \nu = 0.5 \text{ Hz}.$

c) *y(t)* = 10 sin(πt) – jednadžba koja opisuje gibanje točke u koordinatnom početku (*x = 0*).



d) *y(x,t)* = 10 sin $\frac{2\pi}{200}(100t - x) \Rightarrow$ *y*(250.3) = 10 sin π(3-2.5)= 10 sin $\frac{\pi}{2}$ = 10 $\Rightarrow$ y = 10 cm.

Izmjenična struja – sinusoidna izmjenična struja jest ona kojoj se s vremenom mijenja po zakonu

$$\boldsymbol{i(t) = I_0 \sin \omega t.}$$

gdje je $\boldsymbol{I_0}$ maksimalna vrijednost struje, tj. **amplituda**, a $\boldsymbol{\omega} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ **kružna frekvencija**.

Ovisnost **izmjeničnog napona** o vremenu dana je s

$$\boldsymbol{u(t) = U_0 \sin\omega t.}$$

Zadatak 5.

Izmjenična struja $i(t) = 4\sin 314t$ prolazi otpornikom R = 50 Ω.

a) Kolika je frekvencija struje?

b) Kolike su maksimalne i efektivne vrijednosti jakosti električne struje i napona?

c) Grafički prikažite električnu struju i napon.

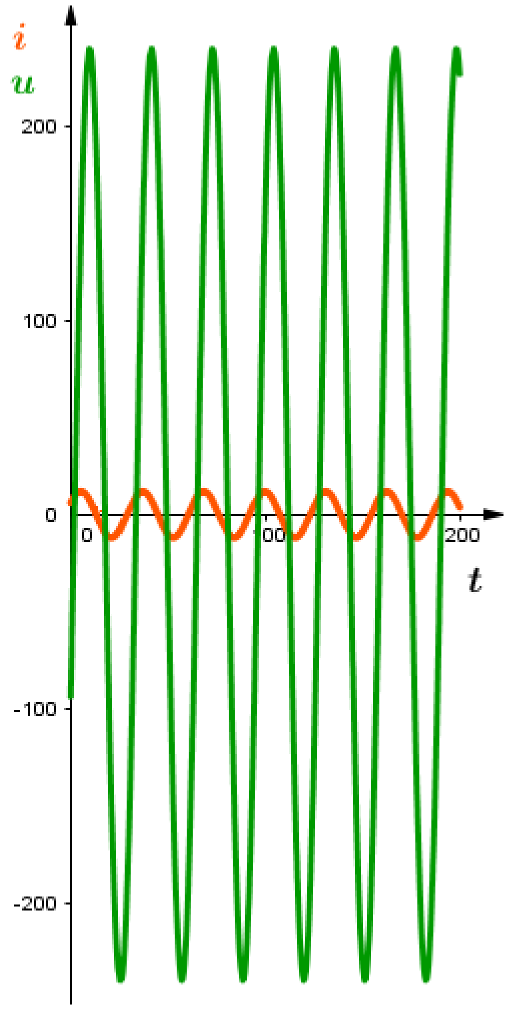
Rješenje:

a) $\omega = 314\ \mathrm{s}^{-1}, \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50 \Rightarrow \nu = 50$ Hz

b) $I_0 = 4$ A, I = $I_0 0.707 = 2.83$ A,

$U = IR = 141.4$ V $\Rightarrow U_0 = U\sqrt{2} = 200$ V

c) $i(t) = 4\ \sin(314t)$ $\quad u(t) = 200\sin(314t)$



Zadatak 6.

Napišite jednadžbu izmjenične struje efektivne vrijednosti 5 A i frekvencije 50 Hz te nacrtajte grafički prikaz.

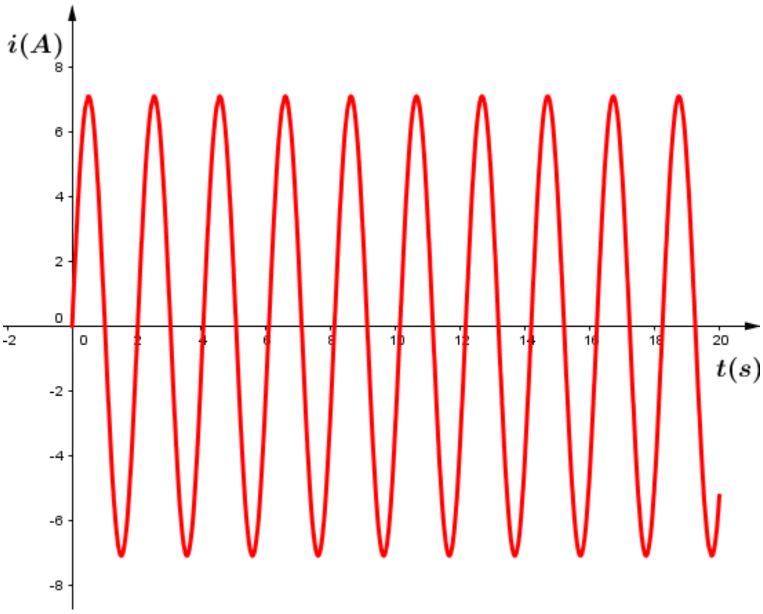
Rješenje:

$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \Rightarrow \omega = 314$ s^{-1}

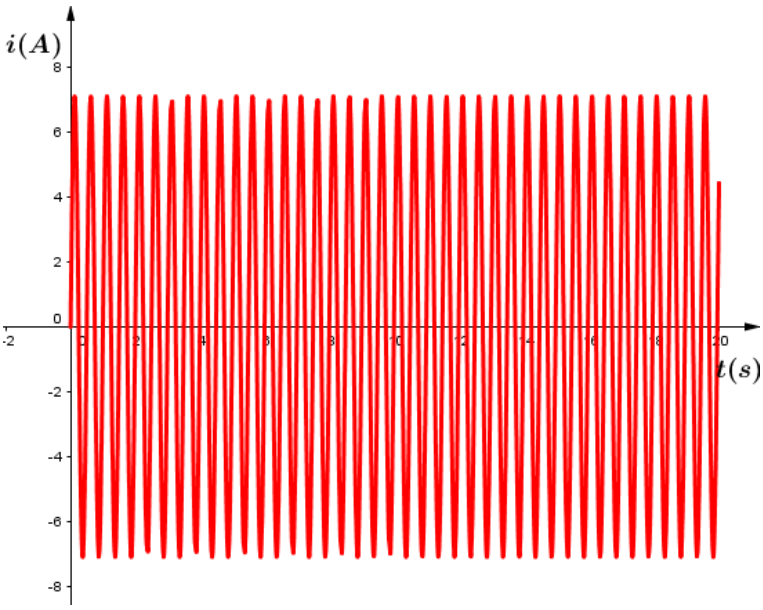
$I_0 = I\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = 7.1$ A

Jednadžba izmjenične struje $i(t) = 7.1 \sin 314t$.

a) $\omega = 3.1$ s^{-1}



b) $\omega = 12.6$ s^{-1}



c) $\omega = 314$ s^{-1}

Biologija – porast leukocita / populacija jedinki neke vrste

Zadatak 7.
Bolesniku se broj leukocita mijenja od niskih $2.8 \cdot 10^9$ po litri (virusna infekcija) do povišenih $27 \cdot 10^9$ po litri (bakterijska infekcija). Razmak između dvaju povećanja leukocita jest 21 dan.

a) Odredite formulu prema kojoj se ponaša njegov imunitet ovisno o danima od početka bolesti (modelira se funkcijom sinus bez faznog pomaka).

b) Nacrtajte graf funkcije na intervalu $[0,30]$.

c) Koja je razina leukocita normalna za navedenog bolesnika?

d) Kolika je razina leukocita bila 10-i dan?

e) Kada su mu se prvi puta povisili leukociti na razinu $27 \cdot 10^9$ po litri?

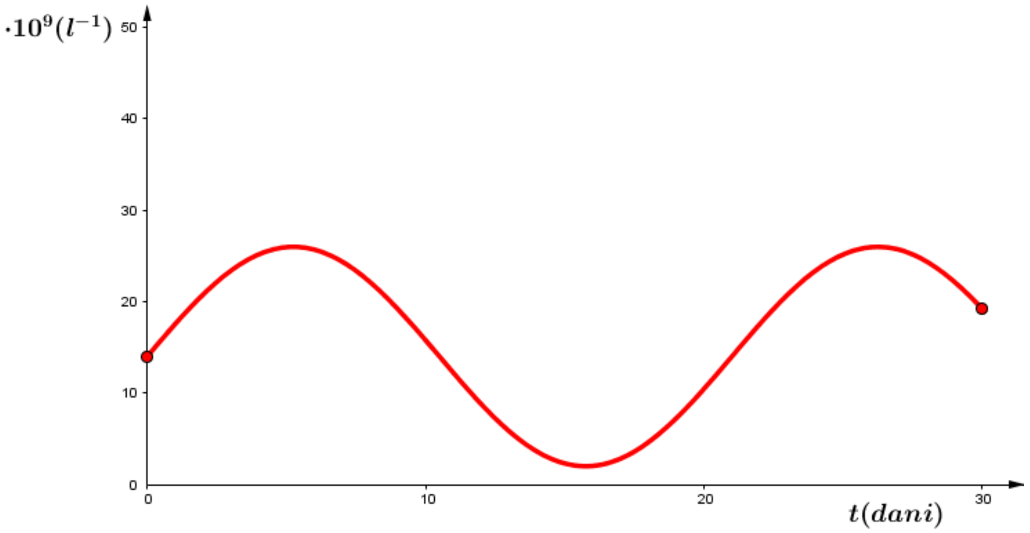
Rješenje:

a) A= $\frac{1}{2}(\max - \min) = \frac{1}{2} \cdot 24.2 \cdot 10^9$=12.1$\cdot 10^9$

Period = 21, pomak po osi y = min + A = (2.8+12.1) $\cdot 10^9$ = 14.9$\cdot 10^9$

Formula funkcije glasi: *f(t)* = 12.1$\cdot 10^9$ sin$\left(\frac{2\pi}{21}t\right) + 14.9 \cdot 10^9$

b)



c) Normalna razina leukocita kod takvog bolesnika: *t = 0* ⇒ $f(0)$ = 14.9 · 10^9

d) Razina leukocita 10-i dan bolesti *t = 10* ⇒ $f(10)$ = 15.22· 10^9

e) 12.1 · 10^9 sin($\frac{2\pi}{21}t$) + 14.9 · 10^9=27· 10^9 ⇒ sin($\frac{2\pi}{21}t$) = 1⇒ $\frac{2\pi}{21}t = \frac{\pi}{2}$ ⇒ *t = 5.25*

(leukociti su se povisili šesti dan bolesti)

Zadatak 8.

Minimalni broj od 8 000 komaraca zabilježen je tri mjeseca nakon početka istraživanja. Sljedeći maksimalni broj od 230 000 jedinki zabilježen je nakon 8 mjeseci od početka. Biolozi su zaključili da se populacija komaraca na tom području može modelirati sinusnom funkcijom

$f(t) = Asin(\omega t + \varphi) + y.$

a) Odredite jednadžbu funkcije.
b) Nacrtajte graf funkcije.
c) Odredite vremensko razdoblje u kojemu je populacija prvi put veća od 150 000 jedinki.

Rješenje:

a) $A = \frac{\max - \min}{2} = 111\ 000,\ y = \min + A = 119\ 000,$

T = 10 (razdoblje od jednog minimuma do drugog), $\omega = \frac{2\pi}{10}$

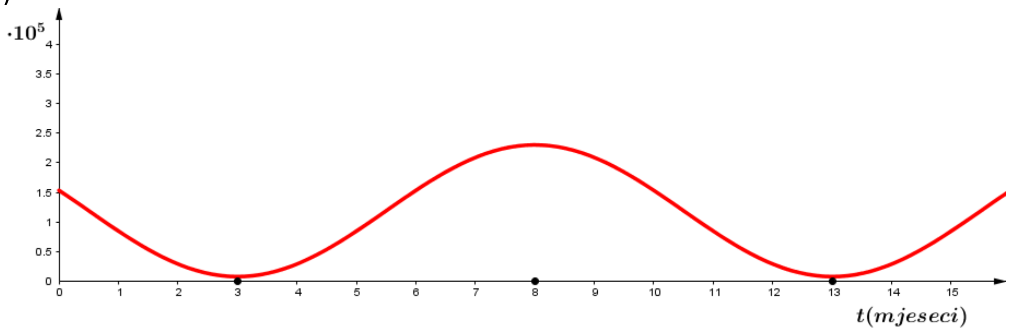
$$230\ 000 = 111\ 000 \sin\left(\frac{16\pi}{10} + \varphi\right) + 119\ 000$$

$$\frac{16\pi}{10} + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

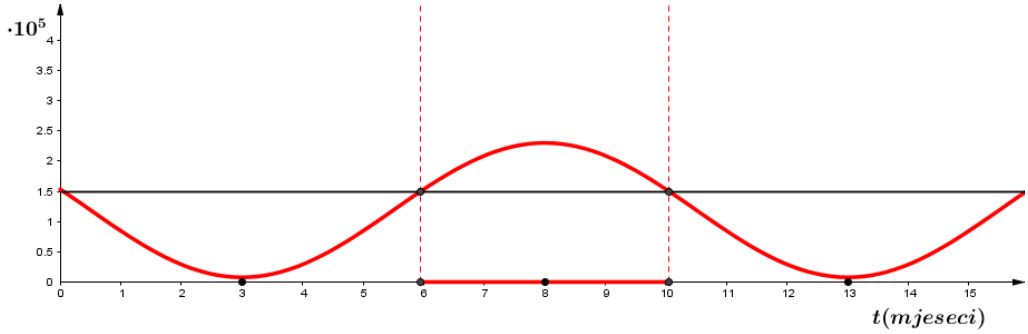
$$\varphi = -\frac{11\pi}{10}$$

$$f(t) = 111\ 000 \sin\left(\frac{2\pi}{10}t - \frac{11\pi}{10}\right) + 119\ 000$$

b)



c)



$t \in [5.95, 10.05]$ vremensko razdoblje u kojem je populacija veća od 150 000 jedinki

Projektni zadaci:

Zanimljivi primjeri za modeliranja trigonometrijskim funkcijama:

a) praćenje Mjesečevih mijena,

b) solarni minimumi i maksimumi,

c) plima i oseka na moru.

Projektni je zadatak za učenike da istraživanjem podataka modeliraju prirodoslovni problem, napišu funkciju i grafički je predstave.

DODATAK: OSNOVE GEOGEBRE

U samom nazivu ovog kurikuluma doznaje se da će se podaci dobiveni eksperimentom obrađivati u programu GeoGebra. Budući da nisu svi učenici koristili GeoGebru u samostalnom radu, a ovisno o nastavniku neki se možda nisu ni susreli s ovim programom, učenike najprije treba upoznati s načinom rada, osnovnim funkcijama GeoGebre, a onda oni mogu samostalno istraživati i otkrivati nove funkcionalnosti u mnoštvu koje ona nudi.

GeoGebra je jedan od najčešćih odabira hrvatskih nastavnika matematike (sve češće i fizike) zbog dostupnosti i lakoće korištenja te preglednosti i mogućnosti uređivanja grafova. Instalacija GeoGebre vrlo je jednostavna: preuzimanje instalacijske datoteke sa stranice https://www.geogebra.org/download, a dalje je samo potrebno slijediti upute. Učenicima je važno naglasiti da je GeoGebra besplatan alat dostupan svima na službenim stranicama i da nema potrebe istraživati gdje se ona može preuzeti te kako ju instalirati.

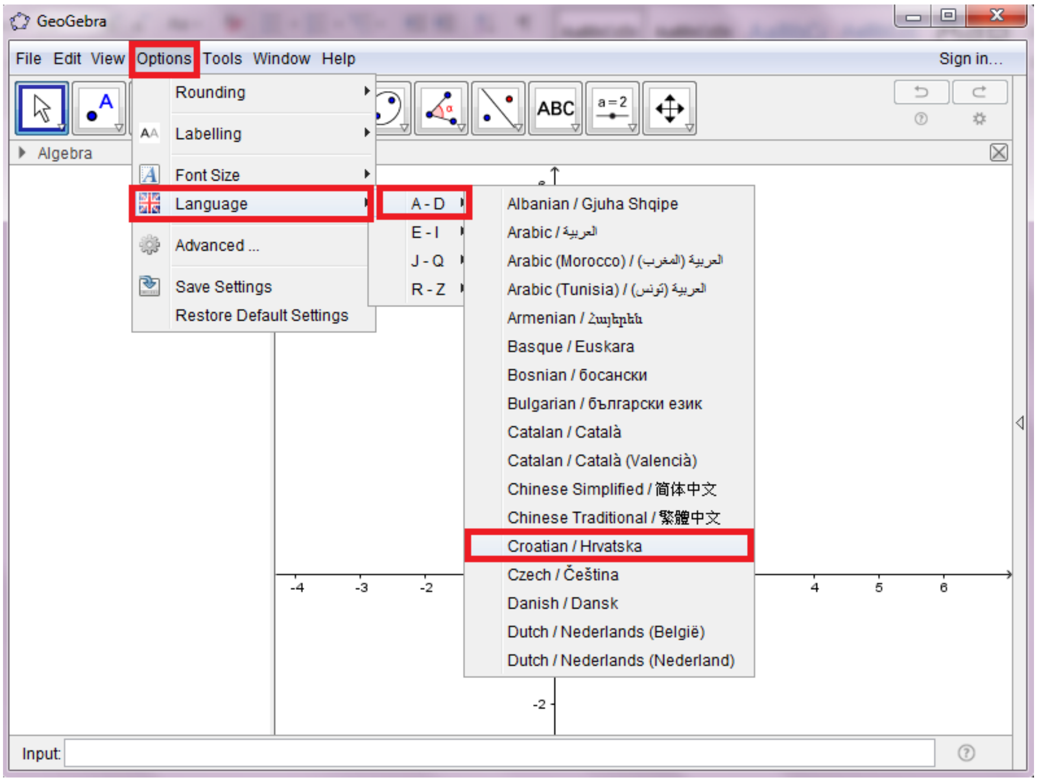
Tijekom sudjelovanja u ovom fakultativnom predmetu učenici će se osposobiti za korištenje GeoGebre na više razina: osnovnoj za ucrtavanje točaka, crtanje grafova funkcija i crtanje grafova iz tablice koja prikazuje podatke dobivene eksperimentom te višoj razini za koju se ne može reći što je granica. Zainteresirani učenik može dostići razinu programiranja u GeoGebri, korištenja složenijih naredbi, istraživanjem može samostalno izrađivati GeoGebra aplete kakve zamisli. Učenici će polako usvajati nova znanja i proširivati vidike što se tiče korištenja matematičkih softvera i njihovih mogućnosti. Učenik bi u ovom fakultativnom predmetu trebao uočiti silne mogućnosti jednog naizgled jednostavnog alata, a spoznajom lakoće obrade podataka smatra se da će se razviti još veći interes za proučavanje dodatnih mogućnosti GeoGebre. Nadamo se da će takva situacija rezultirati i pojačanim interesom za matematiku, fiziku i ostale prirodne znanosti od kojih učenici ponekad bježe misleći da su teški i da ih je prezahtjevno učiti.

Preporuka je da svaki učenik pri prvom susretu (na prvom nastavnom satu) samostalno instalira GeoGebru na računalo. Zatim bi bilo dobro učenicima dati vremena da istražuju korisničko sučelje GeoGebre, mogućnosti koje ona pruža, a do kojih se dolazi odabirom neke od ponuđenih naredbi u padajućim izbornicima. Očite naredbe do kojih se lako dolazi učenici će lako usvojiti. Veća pomoć bit će im potrebna pri obradi podataka dobivenih eksperimentom i u slučaju da učenici pokažu veliki interes, može im se pokazati kako napraviti dinamičke interaktivne GeoGebra aplete.

Odabir jezika

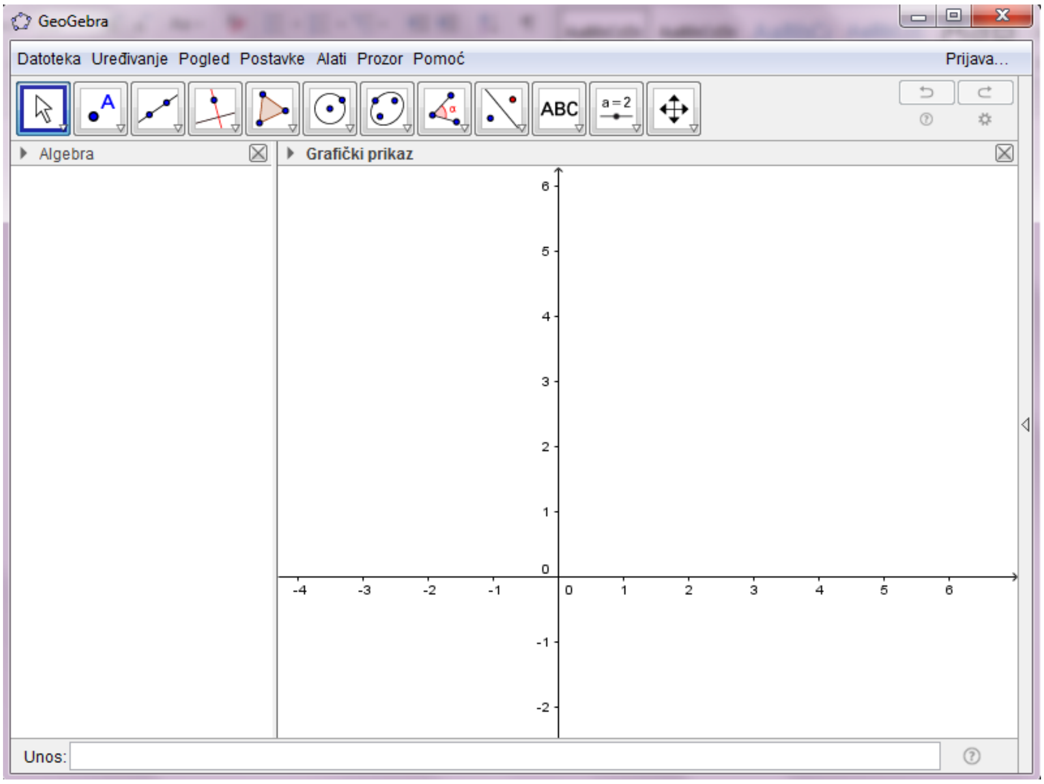
Jezik se u GeoGebri može vrlo jednostavno promijeniti. Učenicima je vjerojatno najjednostavnije raditi u okruženju koje je na hrvatskom jeziku pa se preporuča pokazati im kako se odabire željeni jezik.

Na slici 1.1. prikazano je kako promijeniti jezik. Odabirom naredbe Options otvara se padajući izbornik u kojem je potrebno odabrati opciju Language. Zatim se otvara novi padajući izbornik u kojem su jezici poredani abecednim redom, a do željenog se dolazi odabirom opcije koja ima početno slovo jezika. Tako na primjer za promjenu jezika u hrvatski odabiremo prvu opciju, dakle jezike koje počinju slovima u rasponu A – D, otvara se novi padajući izbornik u kojem odabiremo jezik Croatian/Hrvatska.



Slika 1.1. Odabir jezika u GeoGebri

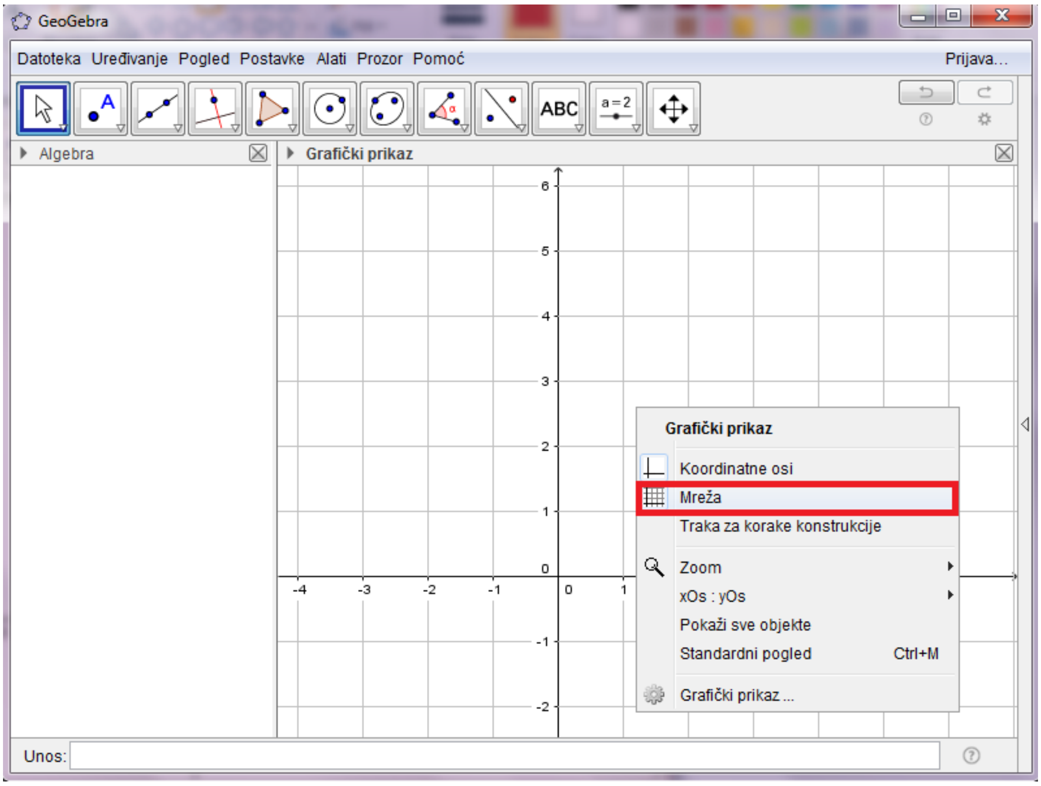
Na sljedećoj slici (Slika 1.2.) prikazano je korisničko sučelje na hrvatskom jeziku.



Slika 1.2. GeoGebra na hrvatskom jeziku

Mreža

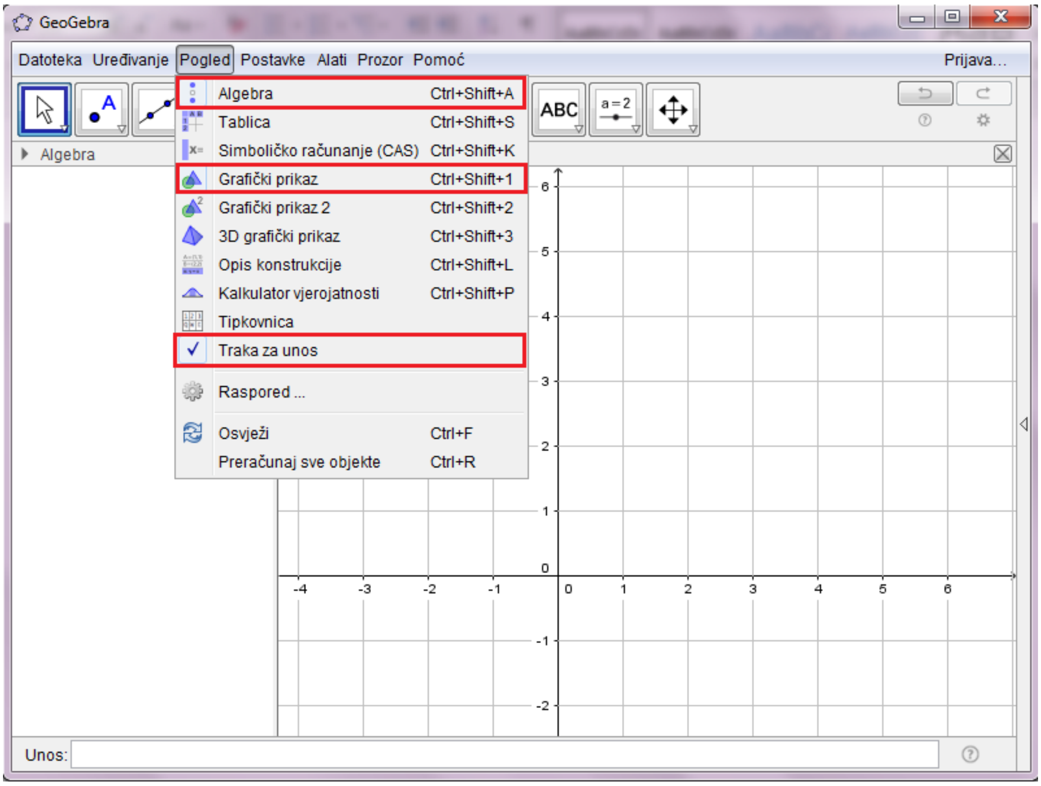
Uključivanje/isključivanje koordinatne mreže najjednostavnije se izvršava desnim klikom u koordinatnom sustavu i odabirom naredbe Mreža. (Slika 1.3.)



Slika 1.3. Koordinatna mreža

Slično odabirom naredbe Koordinatne osi uključuju se/isključuju koordinatne osi.

Pogled

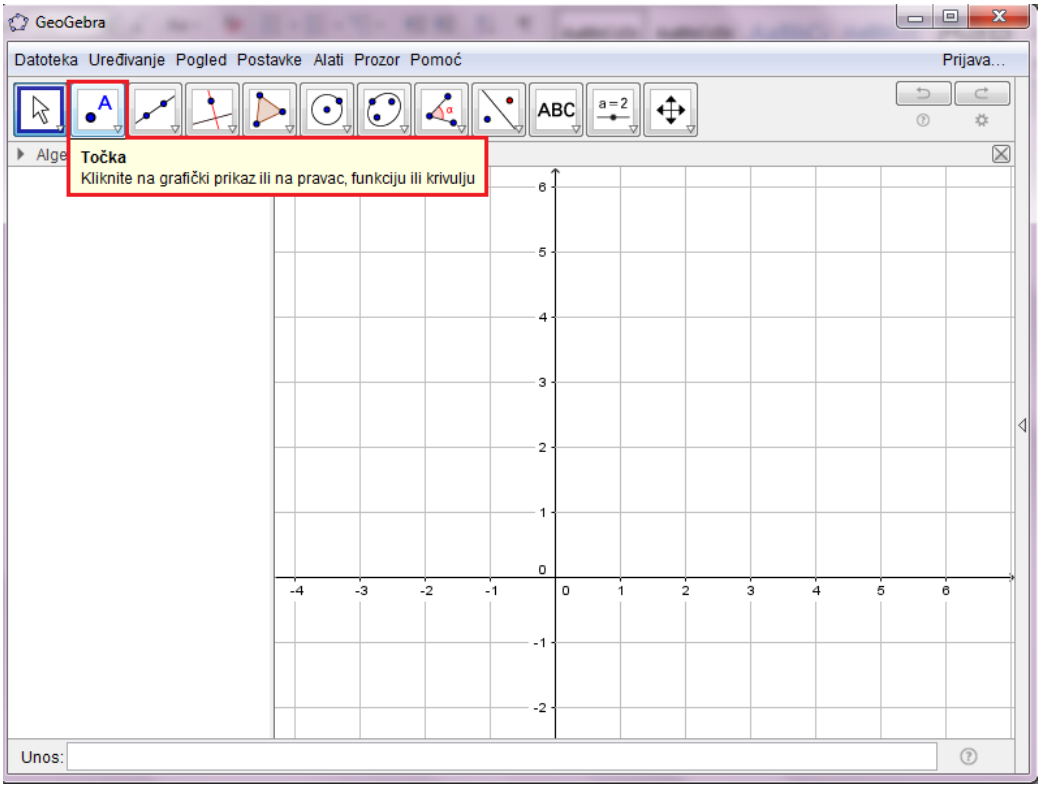


Slika 1.4. Pogled

Otvaranjem GeoGebre automatski su prikazana tri dijela: Algebra (lijevi dio u kojem je popis objekata s kojima radimo), Grafički prikaz (desni dio s koordinatnim sustavom u kojem se prikazuju grafički prikazi objekata s kojima radimo) i Traka za unos (dolje, služi za unos naredbi). (Slika 1.4.)
Odabirom neke od ponuđenih naredbi u padajućem izborniku Pogled otvara se odabrani dio (npr. Tablica za unos podataka u tabličnom prikazu, 3D grafički prikaz otvara koordinatni sustav u tri dimenzije...). Naredba Opis konstrukcije vrlo je korisna jer njome dobivamo sve korake pri konstruiranju objekata, možemo pratiti konstrukciju, a također i pokrenuti animaciju, to jest konstrukciju korak po korak po redoslijedu izvođenja te također prilagođavati brzinu animacije.

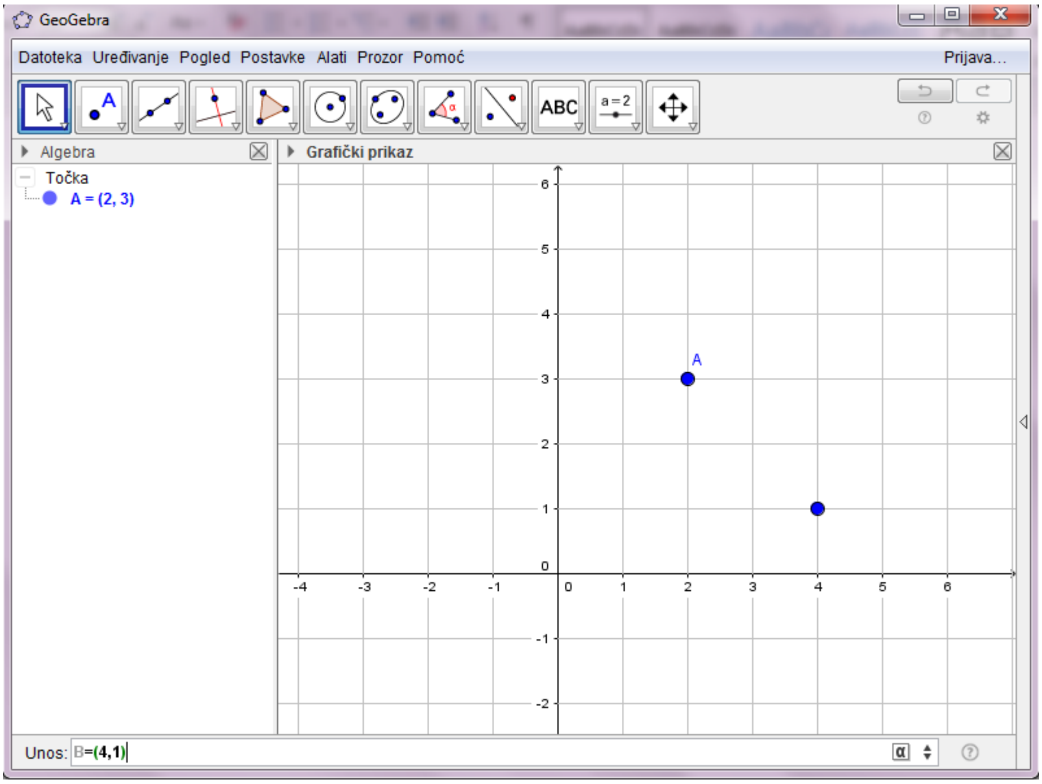
Točke

Točke je veoma jednostavno grafički prikazati. Zadržavanjem pokazivača miša iznad naredbi prikazanih slikama pokazuje se tekstualni okvir koji objašnjava koja je naredba prikazana slikom i kako ju iskoristiti. (Slika 1.5.)



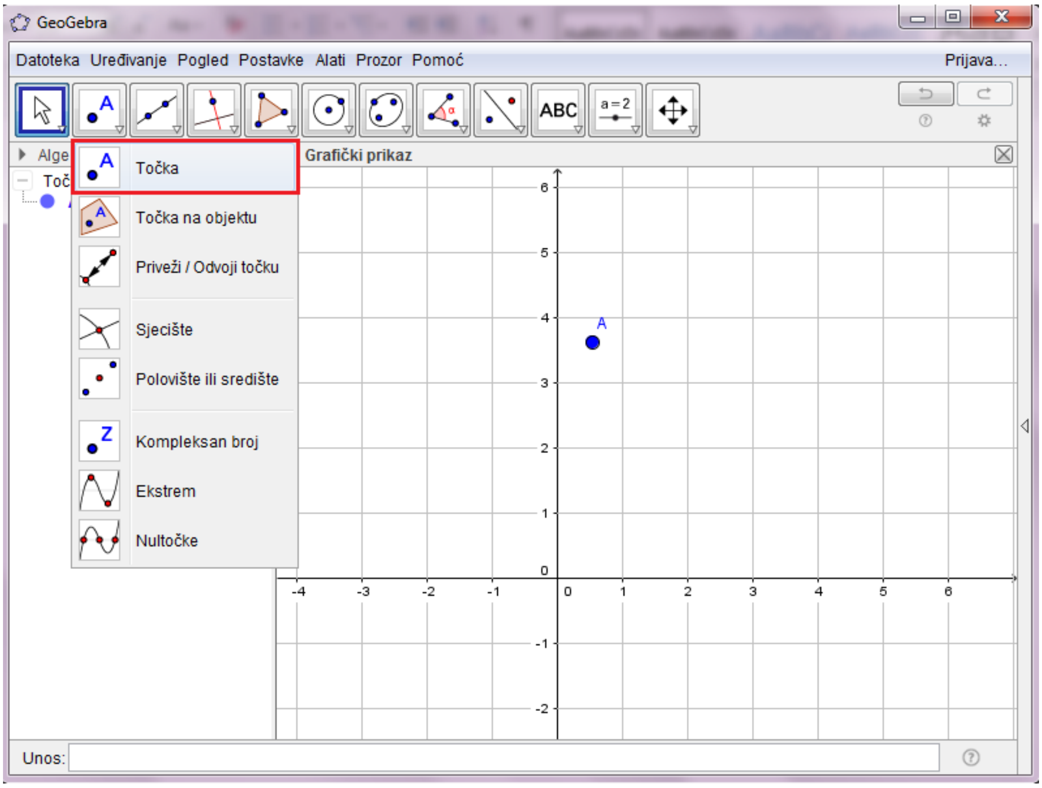
Slika 1.5. Točka – opis naredbe

Pritiskom lijevog gumba miša (odabirom naredbe Točka) i pritiskom bilo gdje u koordinatnom sustavu crta se točka. Točku s određenim koordinatama crtamo tako da miš namjestimo na mjesto u koordinatnoj mreži koje je određeno tim koordinatama. Pri tome treba biti jako precizan i lako je naslutiti da mora postojati način za preciznije crtanje točaka bez namještanja miša po koordinatnom sustavu i pogađanja koordinata. Tome služi traka za unos. U traku za unos upišemo „ime točke = (x koordinata, y koordinata)" na primjer $A = (2,3)$. Pritiskanjem tipke Enter na tipkovnici crta se točka u koordinatnom sustavu, a lijevo u dijelu Algebra prikazane su koordinate nacrtane točke. (Slika 1.6.)



Slika 1.6. Crtanje točke

Odabirom strelice dolje desno na naredbi Točka otvara se padajući izbornik s različitim opcijama za crtanje točke. (Slika 1.7.)

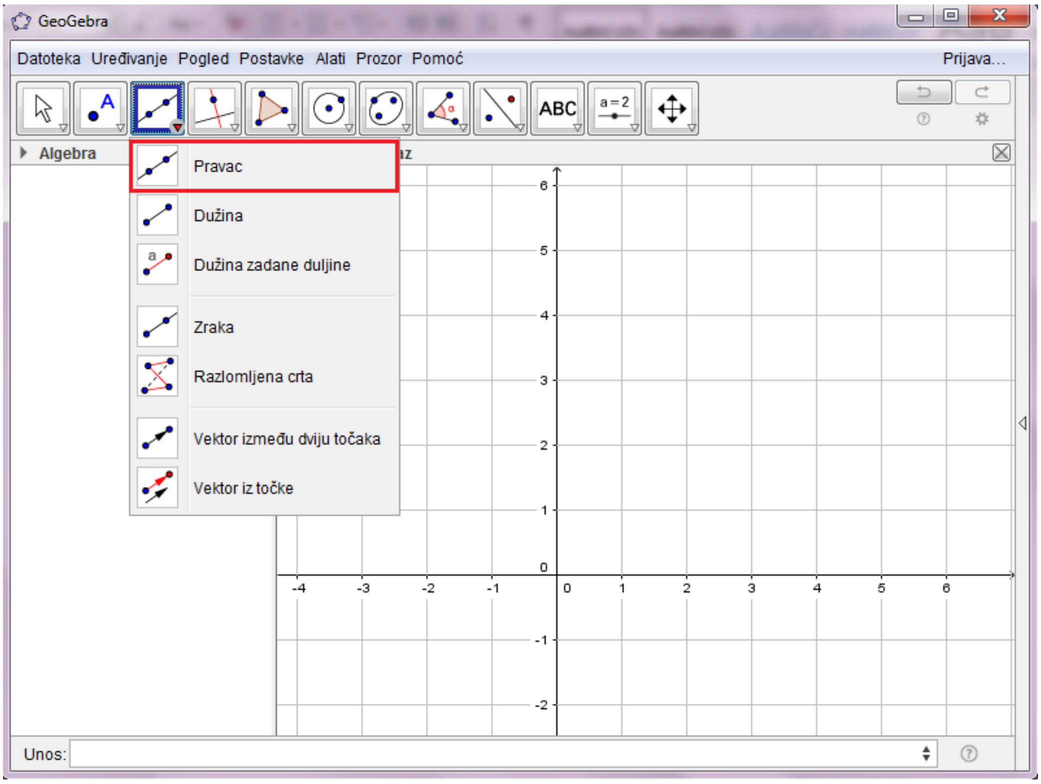


Slika 1.7. Točka

Lako je uočiti da je u GeoGebri veoma jednostavno nacrtati sjecište dvaju objekata ili njihovo polovište/središte. Također se jednostavno određuju nultočke i ekstremi funkcija. Zanimljivo je da odabirom određene naredbe, na primjer Nultočke osim grafičkog prikaza nultočaka, u dijelu Algebra GeoGebra daje koordinate nacrtanih točaka. To je podatak koji treba zapamtiti za kasnije račune koji će se provoditi u ovom fakultativnom predmetu.

Pravci

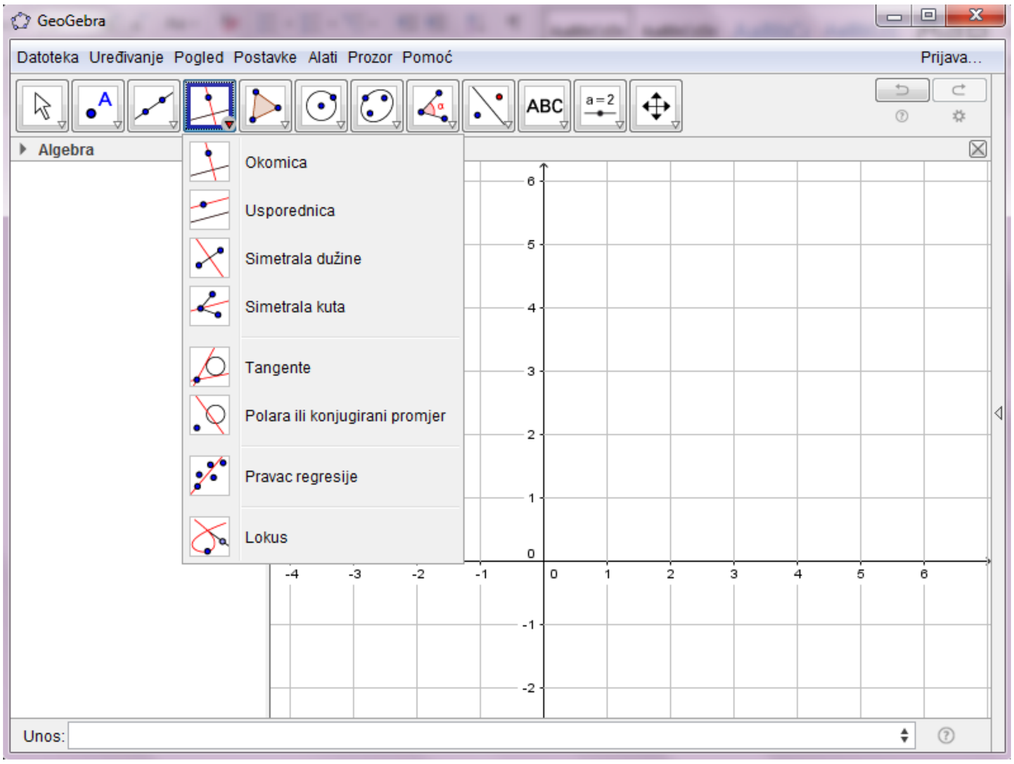
Crtanje pravaca jednostavno je kao i crtanje točaka. (Slika 1.8.)



Slika 1.8. Pravac

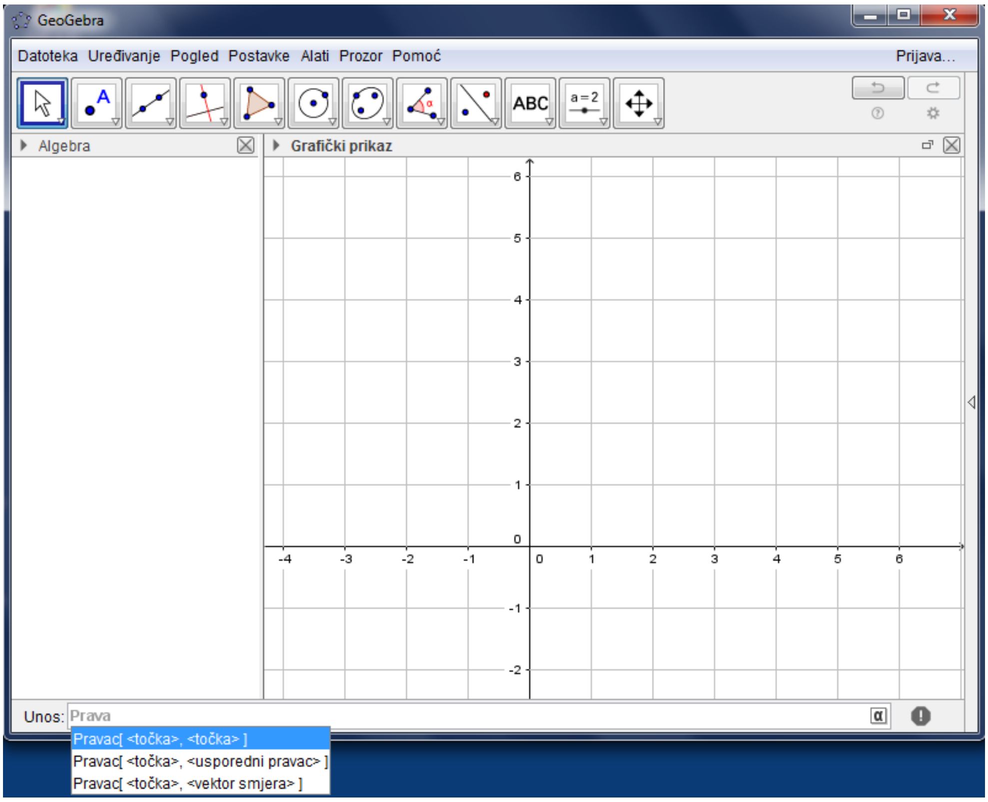
se može crtati na nekoliko načina, a dva su osnovna: pravac kroz dvije točke te upisivanjem jednadžbe pravca u traku za unos.

U GeoGebri se također veoma jednostavno mogu dobiti okomiti i paralelni pravci, simetrale dužina, kutova, tangente... (Slika 1.9.)



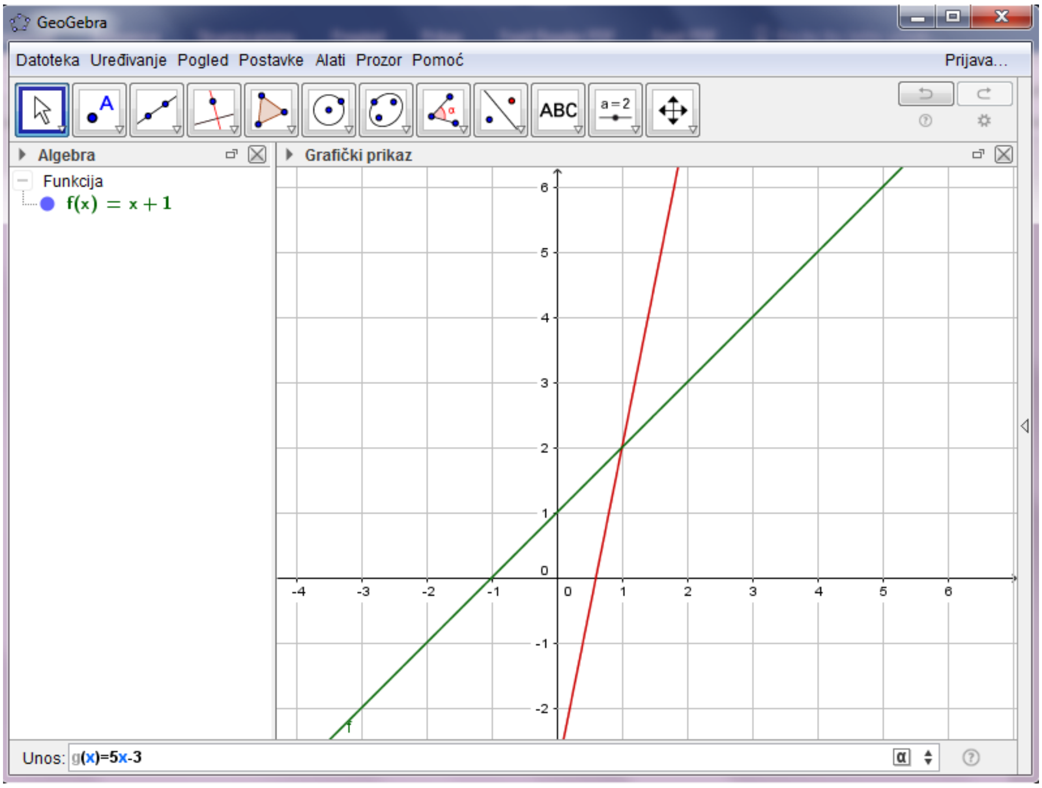
Slika 1.9. Neke mogućnosti GeoGebre

Pravci se mogu crtati s drugim podacima, ne samo kroz dvije točke. Jedan način crtanja pravaca jest korištenje trake za unos upisujući riječ Pravac, a zatim odabirući jednu od ponuđenih opcija, ovisno o tome koje podatke želimo koristiti pri crtanju pravca. (Slika 1.10.)



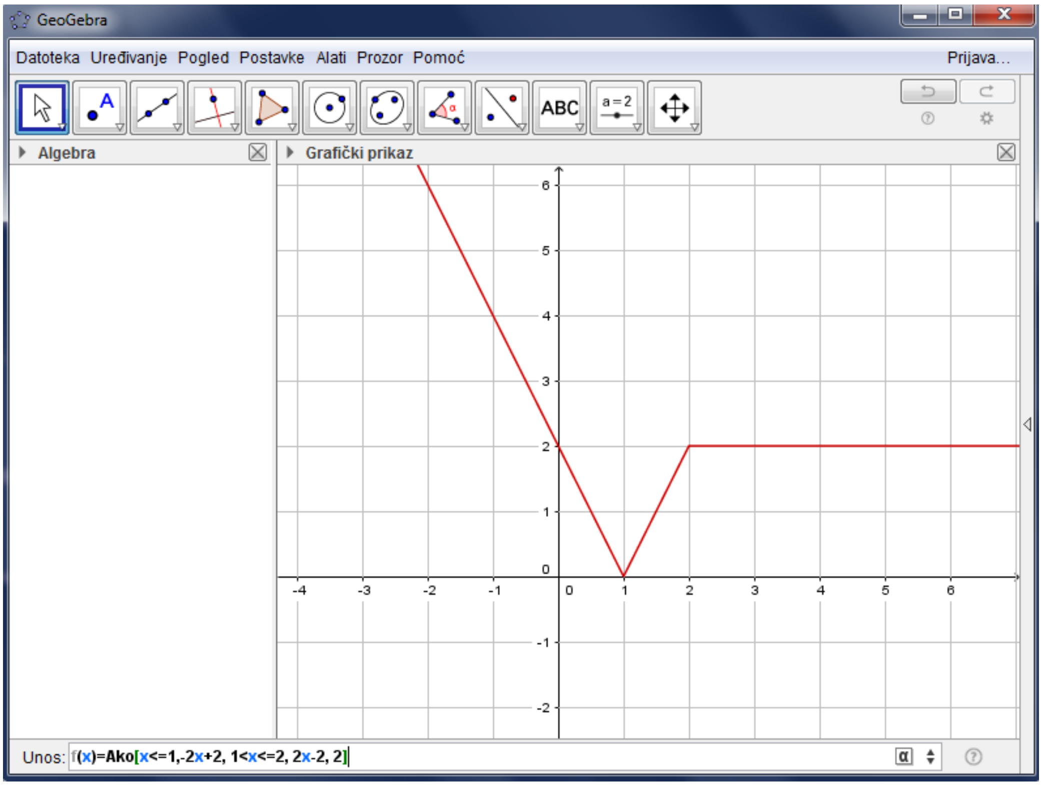
Slika 1.10. Crtanje pravca koristeći traku za unos

Graf **linearne funkcije** crta se jednostavnim upisivanjem funkcije u traku za unos (Slika 1.11.) ili upisivanjem riječi Funkcija u traku za unos te odabirom jedne od ponuđenih naredbi, ovisno o podacima kojima raspolažemo.

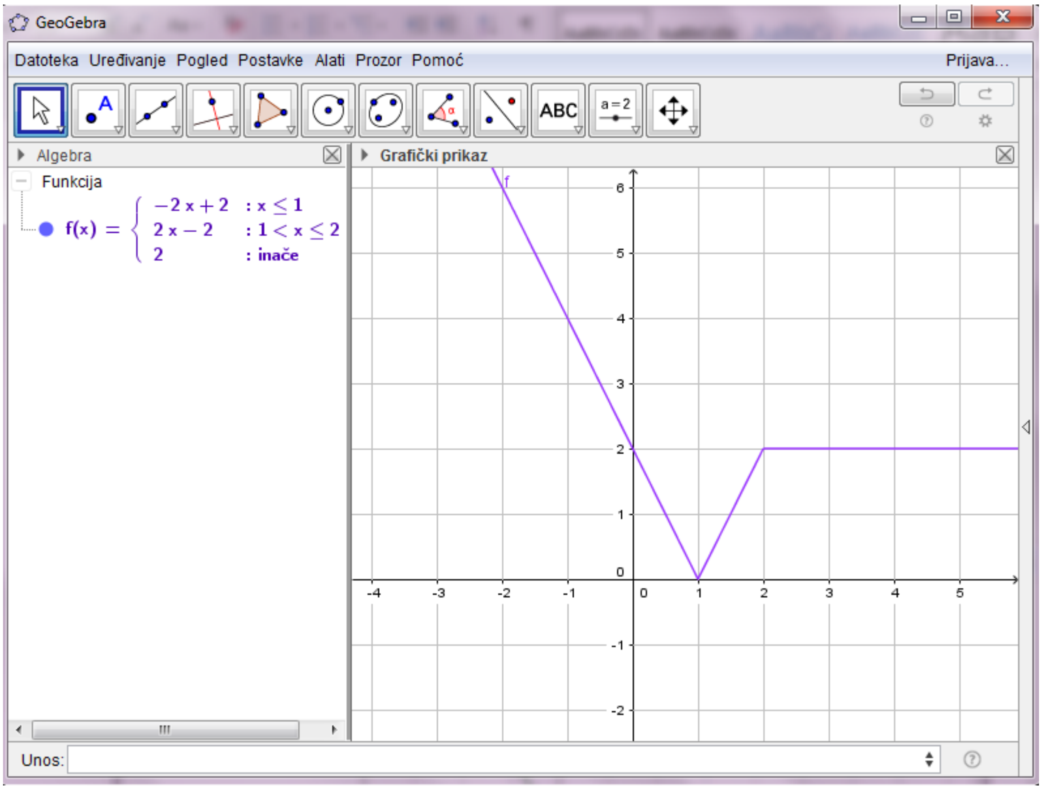


Slika 1.11. Graf linearne funkcije

Graf funkcije zadane po dijelovima dobije se postavljanjem uvjeta pri upisivanju funkcije u traku za unos. (Slika 1.12.)
Pritiskom tipke Enter na tipkovnici graf je funkcije nacrtan, a algebarski zapis funkcije vidi se u dijelu Algebra. (Slika 1.13.)



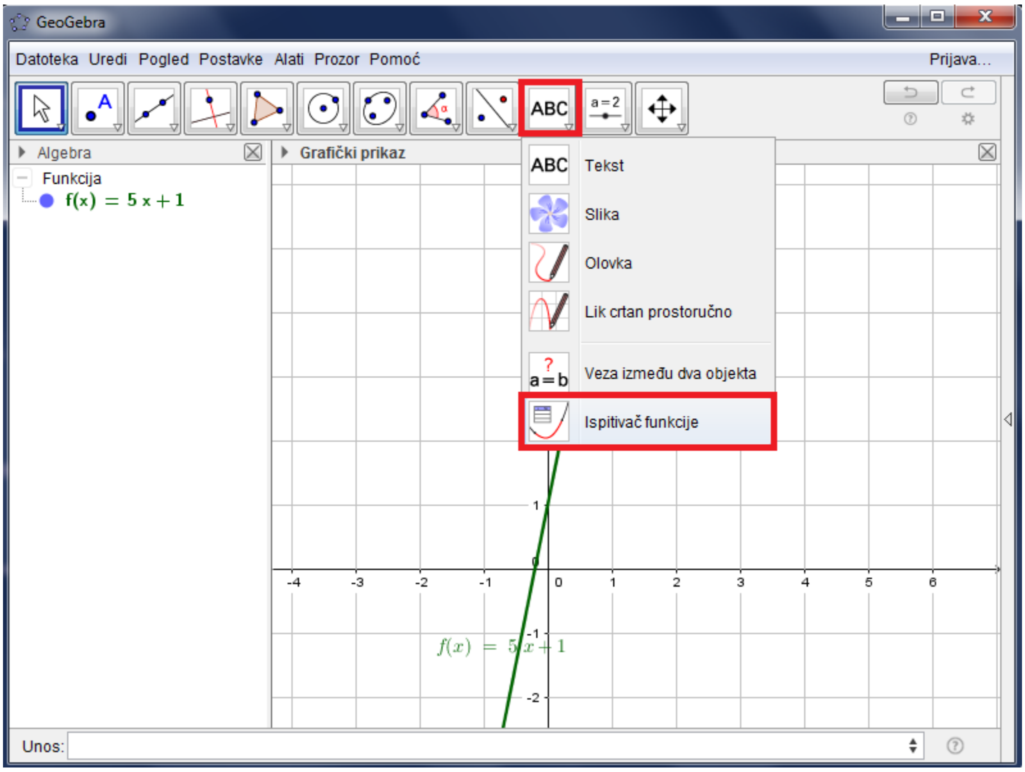
Slika 1.12. Funkcija zadana po dijelovima



Slika 1.13. Funkcija zadana po dijelovima

Ispitivač funkcije

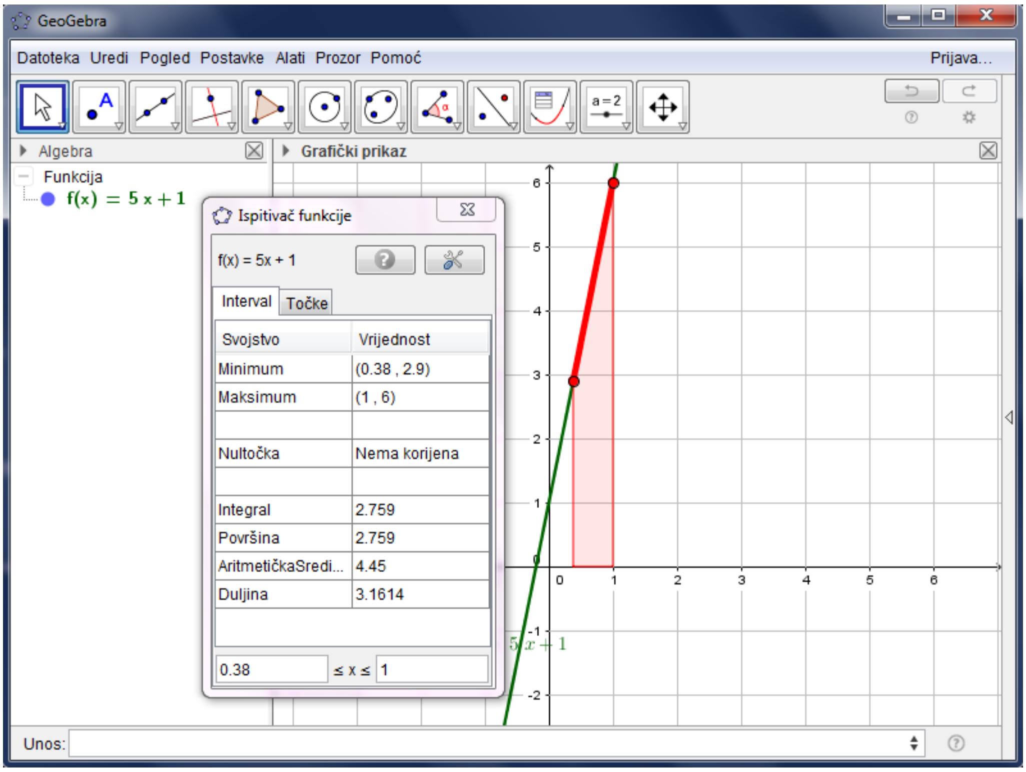
Funkcije treba analizirati. Koristeći GeoGebrin alat Ispitivač funkcije vrlo brzo možemo izračunati vrijednost funkcije u točki, odrediti ekstremnu vrijednost na nekom intervalu, odrediti nultočke na nekom intervalu… (Slika 1.134.)



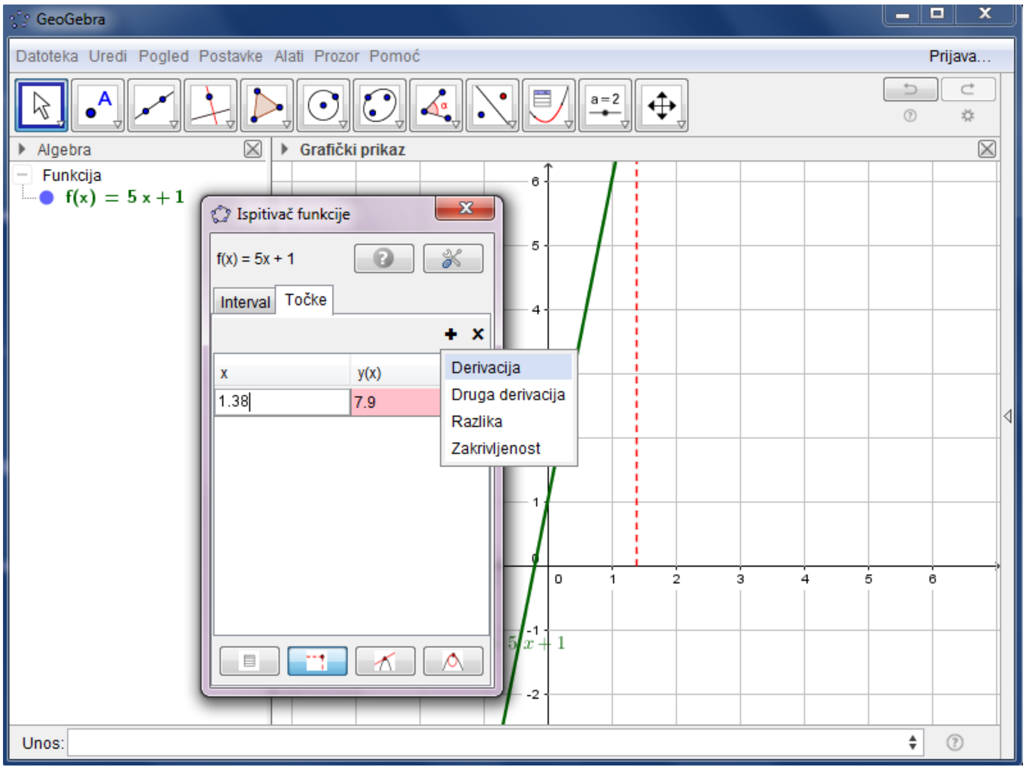
Slika 1.14. Ispitivač funkcije

Nakon odabira Ispitivača funkcije potrebno je odabrati funkciju koju želimo ispitati. Otvara se prozor u kojem je u donjem dijelu zadan interval na kojem se funkcija promatra. Unošenjem drugih vrijednosti moguće je promijeniti taj interval. On je na grafičkom prikazu označen crvenom bojom. (Slika 1.15.)

Postoji još mogućnosti za ispitivanje svojstava funkcije. Neke od njih dobiju se odabirom druge kartice Točke gdje možemo izračunati vrijednost funkcije za bilo koju vrijednost varijable x. Osim toga moguće je dobiti popis točaka, tangentu, računati derivaciju u točki, drugu derivaciju… (Slika 1.16.)



Slika 1.15. Ispitivač funkcije – Interval



Slika 1.16. Ispitivač funkcije – Točke

LITERATURA

[1] Aufmann, R. N., Barker, V. C., Nation R. D. College Algebra and Trigonometry, Belmont, 2010.
[2] Copić, A., Antoliš, S., Milun, T., Brückler, F. M. Matematika 4, udžbenik 1. i 2. dio, Udžbenik sa zbirkom zadataka u četvrtom razredu opće, jezične i klasične gimnazije, Zagreb, 2013.

[3] Dakić, B., Elezović, N., Matematika u 24 lekcije, priručnik za pripremu državne mature, programi A i B, Element, Zagreb, 2010.

[4] Državni pedagoški standard srednjoškolskog sustava odgoja i obrazovanja, svibanj 2008.

URL: http://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/339619.html (30. 3. 2016.)

[5] Gusić, J., Mladinić, P., Milun, T., Pavković, M., Brückler, F. M. Matematika 2, udžbenik 1. i 2. dio, Udžbenik sa zbirkom zadataka u drugom razredu opće, jezične i klasične gimnazije, Zagreb, 2013.

[6] Glasnik Ministarstva kulture i prosvjete Republike Hrvatske, Nastavni program za gimnazije, Zagreb, 1994.

[7] Krajina, J., Gusić, J., Milun, T., Brückler, F. M. Matematika 1, udžbenik 1. i 2. dio, Udžbenik sa zbirkom zadataka u prvom razredu opće, jezične i klasične gimnazije, Zagreb, 2013.

[8] Kurnik, Z. Znanstveni okviri nastave matematike, Zagreb, 2009.

[9] Mikuličić, B., Varićak, M, Vernić, E. Zbirka zadataka iz fizike, priručnik za učenike srednjih škola, ŠK, Zagreb, 1998.

[10] Mlinarević, V. Učitelj i odrednice uspješnog poučavanja. 2002.

URL: https://bib.irb.hr/datoteka/505871.505871.Ucitelji_i_odrednice_uspjesnog_poucavanja.pdf (24. 4. 2016.)

[11] Mlinarević, V., Peko, A. i Vujnović, M. Suradničkim učenjem ka zajedničkom učenju

URL: https://bib.irb.hr/datoteka/506095.Suradnickim_ucenjem_ka_zajednicom_cilju.pdf (16. 4. 2016.)

[12] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta Matematika, Prijedlog, veljača 2016.

http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/03/Matematika.pdf (13. 2. 2016.)

[13] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta Fizika, Prijedlog, veljača 2016.

http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/03/Fizika.pdf (15. 2. 2016.)

[14] Narasimhan, R. College Algebra: Building Concepts and Connections, Belmont, 2009.

[15] Nastavni program obvezne nastave iz nastavnog predmeta Matematika, 2015.

http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf (13. 11. 2015.)

[16] Paar, V. Fizika gibanje i energija, priručnik za 1. Razred gimnazije, ŠK, Zagreb, 1994.

[17] Pavleković, M. Metodika nastave matematike s informatikom I, Zagreb, 2001.

[18] Pavleković, M. Metodika nastave matematike s informatikom II, Zagreb, 1999.

[19] Roginić, T. Fizika 1, udžbenik za dvogodišnji i trogodišnji program fizike srednjih škola, ŠK, Zagreb, 2007.

[20] Špalj, E., Antončić, N., Milun, T., Brückler, F. M. Matematika 3, udžbenik 1. i 2. dio, Udžbenik sa zbirkom zadataka u trećem razredu opće, jezične i klasične gimnazije, Zagreb, 2013.

[21] URL: https://www.GeoGebra.org/manual/en/Manual (26. 2. 2016.)